Second degré : corrigé de l'entraînement

Première spécialité mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$. Ici $a = 2$, $b = -4$ et $c = -6$.

1. **Forme canonique de f**
   On calcule l'abscisse du sommet :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1$$
   On calcule ensuite l'ordonnée correspondante :
   $$f(x_0) = f(1) = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 6 = 2 - 4 - 6 = -8$$
   La forme canonique est donc :
   $$f(x) = a(x - x_0)^2 + f(x_0) = 2(x - 1)^2 - 8$$

2. **Axe de symétrie de la parabole**
   L'axe de symétrie de la parabole est la droite verticale d'équation :
   $$x = x_0 \quad \text{soit} \quad x = 1$$

3. **Coordonnées du sommet**
   Le sommet de la parabole a pour coordonnées :
   $$S(x_0\,;\, f(x_0)) = S(1\,;\, -8)$$

4. **Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$**
   Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut et la fonction est strictement décroissante puis strictement croissante.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Racines de f**
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64$$
   Comme $\Delta > 0$, la fonction admet deux racines réelles distinctes :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{4 - 8}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$
   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{4 + 8}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

6. **Forme factorisée de f**
   Puisque $\Delta > 0$, la forme factorisée est :
   $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - (-1))(x - 3) = 2(x + 1)(x - 3)$$

7. **Tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$**
   Le trinôme est du signe de a ($a = 2 > 0$) à l'extérieur des racines et du signe contraire de a à l'intérieur.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 9$. Ici $a = -1$, $b = 6$ et $c = -9$.

1. **Forme canonique de g**
   On détermine x_0 :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$
   On calcule ensuite l'image de x_0 :
   $$g(x_0) = g(3) = -(3)^2 + 6 \times 3 - 9 = -9 + 18 - 9 = 0$$
   La forme canonique est donc :
   $$g(x) = a(x - x_0)^2 + g(x_0) = -(x - 3)^2$$

2. **Axe de symétrie de la parabole**
   L'axe de symétrie est la droite d'équation :
   $$x = x_0 \quad \text{soit} \quad x = 3$$

3. **Coordonnées du sommet**
   Le sommet de la parabole est :
   $$S(x_0\,;\, g(x_0)) = S(3\,;\, 0)$$

4. **Tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$**
   Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas et la fonction est strictement croissante puis strictement décroissante.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

5. **Racines de g**
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 36 - 36 = 0$$
   Comme $\Delta = 0$, la fonction admet une unique racine réelle (racine double) :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$$

6. **Forme factorisée de g**
   Puisque $\Delta = 0$, la forme factorisée est donnée par :
   $$g(x) = a(x - x_0)^2 = -(x - 3)^2$$

7. **Tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$**
   Comme $\Delta = 0$, la fonction est du signe de a ($a = -1 < 0$) pour tout $x \neq x_0$ et s'annule en x_0.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	

Exercice 3

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x^2 - 12x + 14$. Ici $a = 3$, $b = -12$ et $c = 14$.

1. **Forme canonique de h**
   On détermine x_0 :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 3} = \frac{12}{6} = 2$$
   On calcule ensuite son image :
   $$h(x_0) = h(2) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 14 = 12 - 24 + 14 = 2$$
   La forme canonique est donc :
   $$h(x) = a(x - x_0)^2 + h(x_0) = 3(x - 2)^2 + 2$$

2. **Axe de symétrie de la parabole**
   L'axe de symétrie est la droite d'équation :
   $$x = x_0 \quad \text{soit} \quad x = 2$$

3. **Coordonnées du sommet**
   Le sommet de la parabole est :
   $$S(x_0\,;\, h(x_0)) = S(2\,;\, 2)$$

4. **Tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$**
   Comme $a = 3 > 0$, la parabole est tournée vers le haut et la fonction est strictement décroissante puis strictement croissante.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Racines de h**
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 14 = 144 - 168 = -24$$
   Comme $\Delta < 0$, la fonction h n'admet aucune racine réelle.

6. **Forme factorisée de h**
   Puisque $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.
7. **Tableau de signes de h sur $\mathbb{R}$**
   Comme $\Delta < 0$, la fonction conserve un signe constant sur $\mathbb{R}$, celui de a ($a = 3 > 0$).

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$+$	

Exercice 4

Partie A : Modélisation

1. La ligne de bouées mesure 60 m au total et délimite trois côtés du rectangle : deux côtés de longueur x perpendiculaires à la plage et un côté de longueur L parallèle à la plage. On a donc :
$$2x + L = 60 \iff L(x) = 60 - 2x$$
2. L'aire du rectangle est le produit de ses deux dimensions :
$$f(x) = x \times L(x) = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$$

Partie B : Étude de la fonction

On a $f(x) = -2x^2 + 60x$ avec $a = -2$, $b = 60$ et $c = 0$.

1. Calculons x_0 :
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2 \times (-2)} = \frac{-60}{-4} = 15$$
   Calculons l'image $f(x_0)$:
$$f(x_0) = f(15) = -2 \times 15^2 + 60 \times 15 = -2 \times 225 + 900 = -450 + 900 = 450$$
   La forme canonique de f est ainsi :
$$f(x) = -2(x - 15)^2 + 450$$
2. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$, comme $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. De plus, $f(0) = 0$ et $f(30) = -2 \times 30^2 + 60 \times 30 = -1800 + 1800 = 0$.

x	0	15	30
$f(x)$	0	450	0

3. D'après le tableau de variations, la fonction f atteint son maximum en $x = 15$. L'aire de baignade est maximale pour $x = 15$ m, et cette aire maximale vaut 450 m^2.

Partie C : Résolution d'équation

1. On cherche les valeurs de x telles que $f(x) = 400$, ce qui équivaut à :
$$-2x^2 + 60x = 400 \iff -2x^2 + 60x - 400 = 0$$
2. Résolvons cette équation du second degré avec $a = -2$, $b = 60$ et $c = -400$:
$$\Delta = b^2 - 4ac = 60^2 - 4 \times (-2) \times (-400) = 3600 - 3200 = 400$$
Comme $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-60 - \sqrt{400}}{2 \times (-2)} = \frac{-60 - 20}{-4} = \frac{-80}{-4} = 20$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-60 + \sqrt{400}}{2 \times (-2)} = \frac{-60 + 20}{-4} = \frac{-40}{-4} = 10$$
Ces deux valeurs appartiennent bien à l'intervalle [0 ; 30]. Le maître nageur obtient l'aire souhaitée de 400 m^2 en choisissant $x = 10$ m (soit une zone de 10 m $\times$ 40 m) ou $x = 20$ m (soit une zone de 20 m $\times$ 20 m).

Exercice 5

Partie A : Modélisation

1. Le demi périmètre du rectangle est égal à $100/2 = 50$ cm. Une longueur étant positive et ne pouvant pas excéder le demi périmètre, la variable x représentant la largeur appartient nécessairement à l'intervalle [0 ; 50].
2. La somme de la largeur et de la longueur vaut 50 cm, d'où :
$$\text{Longueur} = 50 - x$$
3. L'aire du rectangle est donnée par le produit de la largeur par la longueur :
$$\mathcal{A}(x) = x(50 - x) = -x^2 + 50x$$

Partie B : Étude et optimisation

On considère la fonction $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 50x$ avec $a = -1$, $b = 50$ et $c = 0$.

1. Calculons x_0 :
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2 \times (-1)} = \frac{-50}{-2} = 25$$
Calculons l'image correspondante :
$$\mathcal{A}(x_0) = \mathcal{A}(25) = -(25)^2 + 50 \times 25 = -625 + 1250 = 625$$
La forme canonique est donc :
$$\mathcal{A}(x) = -(x - 25)^2 + 625$$
2. Comme $a = -1 < 0$, la fonction est croissante puis décroissante. En outre, $\mathcal{A}(0) = 0$ et $\mathcal{A}(50) = 0$.

x	0	25	50
$\mathcal{A}(x)$	0	625	0

3. L'aire est maximale pour $x = 25$ cm. La longueur vaut alors $50 - 25 = 25$ cm. La largeur et la longueur étant égales, ce rectangle est un carré de côté 25 cm. Son aire maximale est égale à 625 cm^2.

Partie C : Inéquation et tableau de signes

1. On impose $\mathcal{A}(x) \geq 600$, ce qui se réécrit :

$$-x^2 + 50x \geq 600 \iff -x^2 + 50x - 600 \geq 0$$

2. Soit $P(x) = -x^2 + 50x - 600$. Calculons son discriminant :

$$\Delta = 50^2 - 4 \times (-1) \times (-600) = 2500 - 2400 = 100$$

Comme $\Delta > 0$, le polynôme possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-50 - \sqrt{100}}{2 \times (-1)} = \frac{-50 - 10}{-2} = \frac{-60}{-2} = 30$$

$$x_2 = \frac{-50 + \sqrt{100}}{2 \times (-1)} = \frac{-50 + 10}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20$$

Les racines rangées dans l'ordre croissant sont donc 20 et 30.

3. On dresse le tableau de signes de $P(x)$ sur $[0\ ;\ 50]$. Comme $a = -1 < 0$, $P(x)$ est strictement positif entre ses racines et strictement négatif à l'extérieur.

x	0		20		30		50
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. L'aire du rectangle est supérieure ou égale à 600 cm^2 lorsque $P(x) \geq 0$, c'est à dire pour tout $x \in [20\ ;\ 30]$.

Exercice 6

Partie A : Modélisation

1. Le point H est sur le segment $[AB]$ de longueur 8 cm et F est sur $[AD]$ de longueur 6 cm, avec $AH = AF = x$. Pour que F reste sur le segment $[AD]$, il faut que $0 \leq x \leq 6$. La variable x appartient donc à l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.
2. Par construction géométrique des rectangles et du carré :

$$IJ = AB - AH = 8 - x$$

$$GC = AD - AF = 6 - x$$

3. L'aire totale de la partie colorée est la somme de l'aire du carré $AFIH$ et de l'aire du rectangle $IGCJ$:

$$f(x) = \text{Aire}(AFIH) + \text{Aire}(IGCJ) = x^2 + IJ \times GC$$

$$f(x) = x^2 + (8 - x)(6 - x) = x^2 + (48 - 8x - 6x + x^2) = 2x^2 - 14x + 48$$

Partie B : Étude et optimisation

On a $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$ avec $a = 2$, $b = -14$ et $c = 48$.

1. Calculons x_0 :
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-14}{2 \times 2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$
Calculons l'image $f(x_0)$:
$$f(x_0) = f\left(\frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 14 \times \left(\frac{7}{2}\right) + 48 = 2 \times \frac{49}{4} - 49 + 48 = \frac{49}{2} - 1 = \frac{47}{2} = 23{,}5$$
La forme canonique est donc :
$$f(x) = 2(x - 3{,}5)^2 + 23{,}5$$

2. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$, avec $a = 2 > 0$, la fonction est décroissante puis croissante. Calculons les valeurs aux bornes :
$$f(0) = 48$$
$$f(6) = 2 \times 6^2 - 14 \times 6 + 48 = 72 - 84 + 48 = 36$$

x	0	$3{,}5$	6
$f(x)$	48 ↘	$23{,}5$	↗ 36

3. D'après le tableau de variations, la fonction atteint son minimum en $x = 3{,}5$ cm. L'aire minimale de la partie colorée vaut alors $23{,}5$ cm^2.

Partie C : Équation

1. L'aire est égale à 30 cm^2 si et seulement si :
$$f(x) = 30 \iff 2x^2 - 14x + 48 = 30 \iff 2x^2 - 14x + 18 = 0$$

2. Résolvons l'équation $2x^2 - 14x + 18 = 0$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$:
$$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 196 - 144 = 52$$
Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{52}}{2 \times 2} = \frac{14 - 2\sqrt{13}}{4} = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$$
$$x_2 = \frac{14 + \sqrt{52}}{2 \times 2} = \frac{14 + 2\sqrt{13}}{4} = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$$
Comme $\sqrt{13} \approx 3{,}606$, on obtient :
$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \approx 1{,}70 \text{ cm} \quad \text{soit } 1{,}7 \text{ cm}$$
$$x_2 = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \approx 5{,}30 \text{ cm} \quad \text{soit } 5{,}3 \text{ cm}$$
Ces deux valeurs appartiennent bien à l'intervalle $[0\ ;\ 6]$. Les valeurs exactes répondant au problème sont donc $\frac{7 - \sqrt{13}}{2}$ cm et $\frac{7 + \sqrt{13}}{2}$ cm, soit environ 1,7 cm et 5,3 cm au millimètre près.