Second degré : fiche 7

Première spécialité mathématiques

Préparation à l'évaluation de rentrée

Consignes. La calculatrice est autorisée. Le détail des calculs est attendu : donner les étapes de calcul pour chaque réponse.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

1. Déterminer la forme canonique de f.
2. En déduire l'axe de symétrie de la parabole représentant f.
3. Donner les coordonnées du sommet de cette parabole.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les éventuelles racines de f.
6. Le cas échéant, donner la forme factorisée de f.
7. Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 12x + 18$.

1. Déterminer la forme canonique de g.
2. En déduire l'axe de symétrie de la parabole représentant g.
3. Donner les coordonnées du sommet de cette parabole.
4. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les éventuelles racines de g.
6. Le cas échéant, donner la forme factorisée de g.
7. Dresser le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2 + 4x - 7$.

1. Déterminer la forme canonique de h.
2. En déduire l'axe de symétrie de la parabole représentant h.
3. Donner les coordonnées du sommet de cette parabole.
4. Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les éventuelles racines de h.
6. Le cas échéant, donner la forme factorisée de h.
7. Dresser le tableau de signes de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Un artisan encadreur souhaite concevoir un cadre rectangulaire pour mettre en valeur une photographie. La photographie mesure 30 cm de longueur sur 20 cm de largeur. Le cadre entoure l'image avec une bordure de largeur constante notée x, exprimée en centimètres. Pour des raisons esthétiques et techniques, la largeur de la bordure x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 15]$.

Partie A : Modélisation

1. Exprimer les dimensions extérieures du cadre en fonction de x.
2. Montrer que l'aire totale de la bordure (la surface du cadre seule, sans la photo), notée $A(x)$ et exprimée en cm^2, est donnée par :

$$A(x) = 4x^2 + 100x$$

Partie B : Étude de la fonction

On considère la fonction A définie sur $[0\ ;\ 15]$ par $A(x) = 4x^2 + 100x$.

1. Déterminer la forme canonique de $A(x)$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction A sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$.
3. Déterminer l'aire minimale et l'aire maximale que peut prendre cette bordure sur l'intervalle d'étude.

Partie C : Résolution d'équation

Le client désire que l'aire de la bordure soit exactement égale à 500 cm^2.

1. Montrer que cette condition conduit à résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$ l'équation :

$$4x^2 + 100x - 500 = 0$$

2. Déterminer la valeur exacte de x répondant au souhait du client, puis en donner un arrondi au millimètre près.