Second degré : corrigé de la fiche 7

Première spécialité mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$. Ici $a = -2$, $b = 8$ et $c = -6$.

1. **Forme canonique de f**
   On détermine l'abscisse du sommet :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$
   On calcule l'image correspondante :
   $$f(x_0) = f(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 6 = -8 + 16 - 6 = 2$$
   La forme canonique est donc :
   $$f(x) = a(x - x_0)^2 + f(x_0) = -2(x - 2)^2 + 2$$

2. **Axe de symétrie de la parabole**
   L'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation :
   $$x = x_0 \quad \text{soit} \quad x = 2$$

3. **Coordonnées du sommet**
   Le sommet de la parabole a pour coordonnées :
   $$S(x_0\,;\, f(x_0)) = S(2\,;\, 2)$$

4. **Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$**
   Comme $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas et la fonction est strictement croissante puis strictement décroissante.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

5. **Racines de f**
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-6) = 64 - 48 = 16$$
   Comme $\Delta > 0$, la fonction admet deux racines réelles distinctes :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{16}}{2 \times (-2)} = \frac{-8 - 4}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$
   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{16}}{2 \times (-2)} = \frac{-8 + 4}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$
   Les racines rangées dans l'ordre croissant sont 1 et 3.

6. **Forme factorisée de f**
   Puisque $\Delta > 0$, la forme factorisée est :
   $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -2(x - 1)(x - 3)$$

7. **Tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$**
   Le trinôme est du signe de a ($a = -2 < 0$) à l'extérieur des racines et du signe contraire de a à l'intérieur.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 12x + 18$. Ici $a = 2$, $b = -12$ et $c = 18$.

1. **Forme canonique de g**
   On calcule x_0 :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3$$
   On calcule ensuite l'image de x_0 :
   $$g(x_0) = g(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 18 = 18 - 36 + 18 = 0$$
   La forme canonique est donc :
   $$g(x) = a(x - x_0)^2 + g(x_0) = 2(x - 3)^2$$

2. **Axe de symétrie de la parabole**
   L'axe de symétrie est la droite d'équation :
   $$x = x_0 \quad \text{soit} \quad x = 3$$

3. **Coordonnées du sommet**
   Le sommet de la parabole est :
   $$S(x_0\,;\, g(x_0)) = S(3\,;\, 0)$$

4. **Tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$**
   Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut et la fonction est strictement décroissante puis strictement croissante.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Racines de g**
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$$
   Comme $\Delta = 0$, la fonction admet une racine double :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$$

6. **Forme factorisée de g**
   Puisque $\Delta = 0$, la forme factorisée est :
   $$g(x) = a(x - x_0)^2 = 2(x - 3)^2$$

7. **Tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$**
   Comme $\Delta = 0$, la fonction est du signe de a ($a = 2 > 0$) pour tout $x \neq 3$ et s'annule en 3.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

Exercice 3

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2 + 4x - 7$. Ici $a = -1$, $b = 4$ et $c = -7$.

1. **Forme canonique de h**
   On détermine x_0 :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$
   On calcule l'ordonnée du sommet :
   $$h(x_0) = h(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 - 7 = -4 + 8 - 7 = -3$$
   La forme canonique est donc :
   $$h(x) = a(x - x_0)^2 + h(x_0) = -(x - 2)^2 - 3$$

2. **Axe de symétrie de la parabole**
   L'axe de symétrie est la droite d'équation :
   $$x = x_0 \quad \text{soit} \quad x = 2$$

3. **Coordonnées du sommet**
   Le sommet de la parabole est :
   $$S(x_0\,;\, h(x_0)) = S(2\,;\, -3)$$

4. **Tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$**
   Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas et la fonction est strictement croissante puis strictement décroissante.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

5. **Racines de h**
   On calcule le discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = 16 - 28 = -12$$
   Comme $\Delta < 0$, la fonction h n'admet aucune racine réelle.

6. **Forme factorisée de h**
   Puisque $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.
7. **Tableau de signes de h sur $\mathbb{R}$**
   Comme $\Delta < 0$, la fonction conserve un signe constant sur $\mathbb{R}$, celui de a ($a = -1 < 0$).

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$h(x)$	$-$

Exercice 4

Partie A : Modélisation

1. La photographie mesure 30 cm sur 20 cm. La bordure de largeur x s'ajoute de part et d'autre de la photo, horizontalement et verticalement. Les dimensions extérieures du cadre sont donc :

$$\text{Longueur totale} = 30 + 2x$$

$$\text{Largeur totale} = 20 + 2x$$

2. L'aire de la bordure $A(x)$ s'obtient en retranchant l'aire de la photo à l'aire totale extérieure du cadre :

$$\text{Aire totale} = (30 + 2x)(20 + 2x) = 600 + 60x + 40x + 4x^2 = 4x^2 + 100x + 600$$

$$\text{Aire de la photo} = 30 \times 20 = 600$$

   D'où, pour tout $x \in [0\ ;\ 15]$:

$$A(x) = (4x^2 + 100x + 600) - 600 = 4x^2 + 100x$$

Partie B : Étude de la fonction

On considère la fonction A définie sur $[0\ ;\ 15]$ par $A(x) = 4x^2 + 100x$ avec $a = 4$, $b = 100$ et $c = 0$.

1. Calculons x_0 :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2 \times 4} = -\frac{100}{8} = -12{,}5$$

   Calculons l'image de x_0 :

$$A(x_0) = A(-12{,}5) = 4 \times (-12{,}5)^2 + 100 \times (-12{,}5) = 4 \times 156{,}25 - 1250 = 625 - 1250 = -625$$

   La forme canonique de $A(x)$ est donc :

$$A(x) = 4(x + 12{,}5)^2 - 625$$

2. Comme $a = 4 > 0$, la fonction associée est strictement croissante sur $[-12{,}5\ ;\ +\infty[$. En particulier, la fonction A est strictement croissante sur l'intervalle d'étude $[0\ ;\ 15]$. Calculons les valeurs aux bornes :

$$A(0) = 4 \times 0^2 + 100 \times 0 = 0$$

$$A(15) = 4 \times 15^2 + 100 \times 15 = 4 \times 225 + 1500 = 900 + 1500 = 2400$$

x	0	15
$A(x)$	0	2400

3. D'après le tableau de variations sur [0 ; 15] : l'aire minimale de la bordure est égale à 0 cm^2 (cas où $x = 0$, c'est à dire sans bordure) et l'aire maximale est égale à 2400 cm^2 (atteinte pour la largeur maximale $x = 15$ cm).

Partie C : Résolution d'équation

1. L'aire de la bordure est égale à 500 cm^2 si et seulement si :

$$A(x) = 500 \iff 4x^2 + 100x = 500 \iff 4x^2 + 100x - 500 = 0$$

2. Résolvons sur [0 ; 15] l'équation $4x^2 + 100x - 500 = 0$ avec $a = 4$, $b = 100$ et $c = -500$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \times 4 \times (-500) = 10000 + 8000 = 18000$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$\sqrt{18000} = \sqrt{900 \times 20} = 30\sqrt{20} = 60\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-100 - 60\sqrt{5}}{2 \times 4} = \frac{-100 - 60\sqrt{5}}{8} = \frac{-25 - 15\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-100 + 60\sqrt{5}}{2 \times 4} = \frac{-100 + 60\sqrt{5}}{8} = \frac{-25 + 15\sqrt{5}}{2}$$

Puisque $x_1 < 0$, cette solution n'appartient pas à l'intervalle [0 ; 15].
Pour x_2 : comme $\sqrt{5} \approx 2{,}236$:

$$x_2 = \frac{-25 + 15\sqrt{5}}{2} \approx \frac{-25 + 33{,}54}{2} \approx 4{,}27 \text{ cm} \quad \text{soit } 4{,}3 \text{ cm}$$

Cette valeur appartient bien à l'intervalle [0 ; 15].

La largeur de bordure répondant au souhait du client est exactement $\dfrac{-25 + 15\sqrt{5}}{2}$ cm, soit environ 4,3 cm au millimètre près.