Second degré : entraînement

Première spécialité

Préparation à l'évaluation de rentrée

Consignes. La calculatrice est autorisée. Le détail des calculs est attendu : donner les étapes de calcul pour chaque réponse.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

1. Déterminer la forme canonique de f.
2. En déduire l'axe de symétrie de la parabole représentant f.
3. Donner les coordonnées du sommet de cette parabole.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les éventuelles racines de f.
6. Le cas échéant, donner la forme factorisée de f.
7. Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 9$.

1. Déterminer la forme canonique de g.
2. En déduire l'axe de symétrie de la parabole représentant g.
3. Donner les coordonnées du sommet de cette parabole.
4. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les éventuelles racines de g.
6. Le cas échéant, donner la forme factorisée de g.
7. Dresser le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.

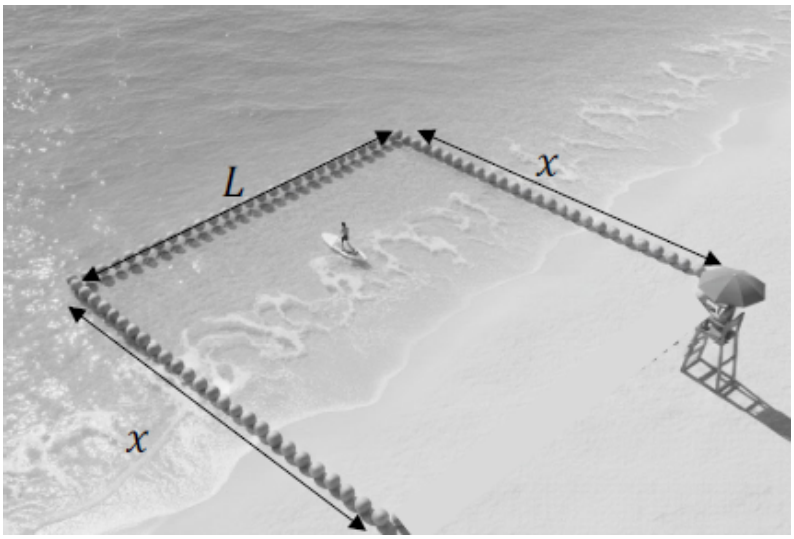
Exercice 3

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x^2 - 12x + 14$.

1. Déterminer la forme canonique de h.
2. En déduire l'axe de symétrie de la parabole représentant h.
3. Donner les coordonnées du sommet de cette parabole.
4. Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les éventuelles racines de h.
6. Le cas échéant, donner la forme factorisée de h.
7. Dresser le tableau de signes de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Un maître-nageur dispose d'une ligne de bouées de 60 mètres de long pour délimiter une zone de baignade rectangulaire le long d'une plage. Il doit utiliser la totalité de la ligne. On considère que le bord de la plage constitue l'un des côtés du rectangle qui n'a pas besoin de bouées.



On note x la longueur du côté perpendiculaire à la plage et L la longueur du côté parallèle à la plage. Ces deux valeurs sont exprimées en mètres. x appartient à l'intervalle $[0\,;\,30]$.

Partie A : Modélisation

1. Exprimer la longueur $L(x)$ en fonction de x.
2. Montrer que l'aire de la zone de baignade, notée $f(x)$, est :

$$f(x) = -2x^2 + 60x$$

Rappel : $\text{Aire}_{\text{rectangle}} = \text{largeur} \times \text{longueur}$.

Partie B : Étude de la fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,30]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 60x$$

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,30]$.
3. Pour quelle valeur de x l'aire de baignade est-elle maximale ? Quelle est alors cette aire ?

Partie C : Résolution d'équation

Le maître-nageur souhaite que l'aire de la zone soit de $400\,\text{m}^2$.

1. Montrer que cela revient à résoudre l'équation :

$$-2x^2 + 60x - 400 = 0.$$

2. Quelles sont les éventuelles valeurs de x permettant au maître-nageur d'avoir l'aire souhaitée ?

Exercice 5

On souhaite construire un rectangle dont le périmètre est fixé à 1 m, soit 100 cm.

On note x la largeur de ce rectangle, exprimée en centimètres.

Partie A : Modélisation

1. Justifier que la variable x appartient à l'intervalle $[0\,;\,50]$.
2. Exprimer la longueur du rectangle en fonction de x.
3. Montrer que l'aire du rectangle, notée $\mathcal{A}(x)$ et exprimée en cm^2, est donnée par :
$$\mathcal{A}(x) = -x^2 + 50x$$

Partie B : Étude et optimisation

1. Déterminer la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0\,;\,50]$.
3. En déduire les dimensions du rectangle d'aire maximale. Quelle est la nature particulière de ce rectangle et quelle est la valeur de son aire ?

Partie C : Inéquation et tableau de signes

On souhaite que l'aire du rectangle soit supérieure ou égale à 600 cm^2.

1. Montrer que ce problème revient à résoudre sur $[0\,;\,50]$ l'inéquation :
$$-x^2 + 50x - 600 \geq 0$$
2. Déterminer les racines du polynôme $P(x) = -x^2 + 50x - 600$.
3. Dresser le tableau de signes de $P(x)$ sur $[0\,;\,50]$.
4. En déduire l'ensemble des valeurs de la largeur x pour lesquelles l'aire du rectangle est supérieure ou égale à 600 cm^2.

Exercice 6

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 8$ cm et $AD = 6$ cm.

On place un point H sur le segment $[AB]$ et un point F sur le segment $[AD]$ de telle sorte que :
$$AH = AF = x \quad \text{(en cm)}$$

On construit alors le carré $AFIH$ et le rectangle $IGCJ$ comme représenté ci-dessous.

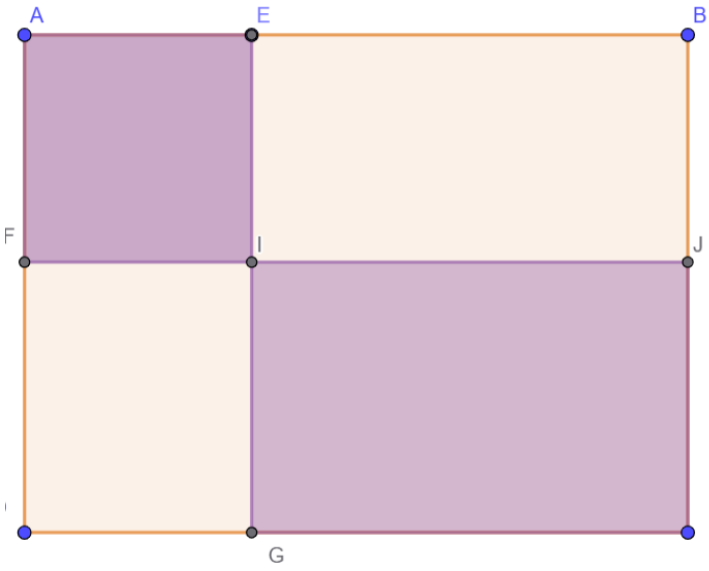


Figure interactive disponible sur GeoGebra : https://www.geogebra.org/classic/a6dsq4cm

On s'intéresse à l'aire totale de la partie colorée, constituée du carré $AFIH$ et du rectangle $IGCJ$.

Partie A : Modélisation

1. Justifier que la variable x appartient à l'intervalle $[0\,;\,6]$.
2. Exprimer les longueurs IJ et GC en fonction de x.
3. Montrer que l'aire de la partie colorée, notée $f(x)$ et exprimée en cm^2, est donnée par :

$$f(x) = 2x^2 - 14x + 48$$

Partie B : Étude et optimisation

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
3. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie colorée est minimale. Quelle est alors cette aire ?

Partie C : Équation

On souhaite que l'aire de la partie colorée soit égale à 30 cm^2.

1. Montrer que cela revient à résoudre sur $[0\,;\,6]$ l'équation :

$$2x^2 - 14x + 18 = 0$$

2. Déterminer les éventuelles valeurs exactes de x répondant au problème, puis en donner des arrondis au millimètre près.