Chapitre 1 : Polynômes du second degré

Partie 2 : Formes d'un trinôme, variations, racines et signe

2) Polynômes du second degré

A) Définition et forme développée

Définition : Fonction polynôme du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou trinôme du second degré) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression peut s'écrire sous la forme dite **développée et réduite** :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois réels fixés avec $a \neq 0$.

- a est le coefficient du terme de second degré (x^2).
- b est le coefficient du terme de premier degré (x).
- c est le terme constant (ordonnée à l'origine : $P(0) = c$).

Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est une courbe appelée **parabole**.

Dans les sciences et la technique

- **Trajectoire d'un projectile :** en physique, un objet lancé dans le champ de pesanteur terrestre uniforme suit (en négligeant les frottements de l'air) une trajectoire parabolique orientée vers le bas.
- **Antennes paraboliques et foyer :** la parabole possède un point privilégié appelé son **foyer**. Tout faisceau d'ondes parallèles à l'axe arrivant sur la surface rebondit en convergeant exactement vers ce foyer (principe des paraboles satellite, télescopes et récepteurs solaires).

B) Forme canonique

Transformation d'écriture : de la forme développée à la forme canonique

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

1. On factorise par a les termes contenant la variable x :

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

2. On fait apparaître le début d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

3. On substitue cette expression dans $P(x)$:

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

4. On réduit les termes constants au même dénominateur $4a$:

$$-\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$ et $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, on obtient l'égalité remarquable :

$$P(x) = a(x - x_0)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Comme $P(x_0) = a(x_0 - x_0)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$, on aboutit à l'écriture :

$$P(x) = a(x - x_0)^2 + P(x_0)$$

Propriété : Forme canonique

Toute fonction polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$P(x) = a(x - x_0)^2 + P(x_0)$$

avec $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

En posant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, l'ordonnée de l'extremum vérifie également :

$$P(x_0) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Notations alternatives dans certains manuels scolaires

Dans de nombreux manuels ou formulaires, l'abscisse x_0 est notée α et l'ordonnée $P(x_0)$ est notée β. La forme canonique s'écrit alors :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = P(\alpha)$$

Les notations x_0 et $P(x_0)$ utilisées dans ce cours ont l'avantage de rappeler immédiatement que la seconde coordonnée est simplement l'image de la première par la fonction P.

Méthode sans formule : identité remarquable et ajustement

On peut déterminer la forme canonique sans mémoriser de formule : on factorise d'abord par a les termes en x, on reconnaît le début d'une identité remarquable $(x \pm d)^2$, puis on ajuste la constante.

Mise sous forme canonique par ajustement

Écrivons $P(x) = 2x^2 - 12x + 10$ sous forme canonique :

- On factorise par 2 sur les deux premiers termes : $P(x) = 2\left(x^2 - 6x\right) + 10$.
- On reconnaît que $x^2 - 6x$ est le début de $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, d'où :

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$$

- On substitue et on développe le crochet :

$$P(x) = 2\left[(x - 3)^2 - 9\right] + 10 = 2(x - 3)^2 - 18 + 10 = 2(x - 3)^2 - 8$$

On identifie ici directement $a = 2$, $x_0 = 3$ et $P(x_0) = -8$.

C) Variations, extremum et sommet

Propriété : Sens de variation et extremum

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a(x - x_0)^2 + P(x_0)$ avec $a \neq 0$. Comme pour tout réel x, $(x - x_0)^2 \geqslant 0$:

- **Si** $a > 0$ **:** $a(x - x_0)^2 \geqslant 0$, donc $P(x) \geqslant P(x_0)$.
  La fonction P est strictement **décroissante** sur $]-\infty\,;\,x_0]$ puis strictement **croissante** sur $[x_0\,;\,+\infty[$.
  Elle admet en x_0 un **minimum** absolu qui vaut $P(x_0)$.
- **Si** $a < 0$ **:** $a(x - x_0)^2 \leqslant 0$, donc $P(x) \leqslant P(x_0)$.
  La fonction P est strictement **croissante** sur $]-\infty\,;\,x_0]$ puis strictement **décroissante** sur $[x_0\,;\,+\infty[$.
  Elle admet en x_0 un **maximum** absolu qui vaut $P(x_0)$.

Cas $a > 0$ (parabole tournée vers le haut)

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		↘	$P(x_0)$	↗	

Cas $a < 0$ (parabole tournée vers le bas)

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		↗	$P(x_0)$	↘	

Propriété : Conséquence géométrique : sommet de la parabole

La courbe représentative de P est une parabole admettant un axe de symétrie vertical d'équation $x = x_0$.
Le point où la courbe change de sens de variation est le **sommet** S de la parabole. Ses coordonnées sont :

$$S\big(x_0\,;\,P(x_0)\big) \quad \text{soit} \quad S\left(-\frac{b}{2a}\,;\,P\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

D) Racines d'un trinôme et équations du second degré

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Résoudre $P(x) = 0$ revient à résoudre l'équation sous sa forme canonique :

$$a(x - x_0)^2 + P(x_0) = 0 \iff a(x - x_0)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \iff a\left[(x - x_0)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Comme $a \neq 0$, cette équation équivaut à :

$$(x - x_0)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Le dénominateur $4a^2 = (2a)^2$ étant strictement positif, le nombre de solutions dépend uniquement du signe de Δ :

- **Si** $\Delta < 0$ **:** un carré ne pouvant être strictement négatif dans $\mathbb{R}$, l'équation **n'a pas de solution réelle**.
- **Si** $\Delta = 0$ **:** l'équation devient $(x - x_0)^2 = 0$, d'où l'unique solution $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- **Si** $\Delta > 0$ **:** l'équation s'écrit $(x - x_0)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, ce qui donne deux solutions distinctes :

$$x - x_0 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x - x_0 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

soit :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Propriété : Synthèse sur les racines et factorisation

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- **Si $\Delta < 0$:** P n'admet **aucune racine** dans $\mathbb{R}$; $P(x)$ n'est pas factorisable en produit de facteurs de degré 1.
- **Si $\Delta = 0$:** P admet une **racine double** $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; la forme factorisée est :

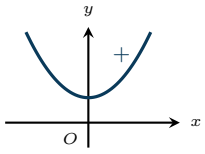
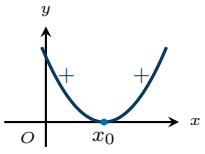
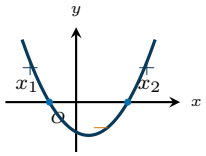
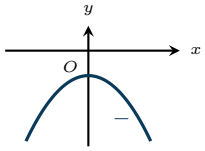
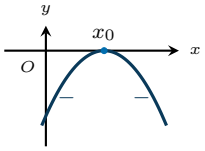
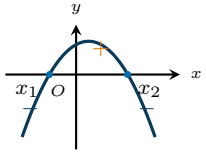
$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

- **Si $\Delta > 0$:** P admet **deux racines distinctes** x_1 et x_2 ; la forme factorisée est :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

E) Signe d'un trinôme du second degré

Pour déterminer le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$, on observe la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses selon les signes de a et du discriminant Δ :

	$\Delta < 0$ (0 racine)	$\Delta = 0$ (1 racine x_0)	$\Delta > 0$ (2 racines x_1, x_2)
$a > 0$			
$a < 0$			

Propriété : Règle du signe d'un trinôme

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

- **Si $\Delta < 0$:** $P(x)$ ne s'annule pas et est **toujours du signe de a** sur $\mathbb{R}$.
- **Si $\Delta = 0$:** $P(x)$ s'annule uniquement en x_0 et est **du signe de a** pour tout $x \neq x_0$.
- **Si $\Delta > 0$:** en notant $x_1 < x_2$ les deux racines réelles, $P(x)$ est :
  - **du signe de a** à l'extérieur des racines $(x \in]-\infty\,;\, x_1[\cup]x_2\,;\, +\infty[)$;
  - **du signe opposé de a** à l'intérieur des racines $(x \in]x_1\,;\, x_2[)$.

Tableau récapitulatif dans le cas $\Delta > 0$ (avec $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $P(x)$	signe de a	0		signe de $-a$		0	signe de a

F) Somme et produit des racines

Propriété : Relations coefficients-racines

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Si P admet deux racines réelles distinctes ou confondues x_1 et x_2 ($\Delta \geqslant 0$), alors leur somme S et leur produit P vérifient :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration

Sous forme factorisée et développée :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a(x_1x_2)$$

Par identification des coefficients avec l'écriture développée $ax^2 + bx + c$:

- $-a(x_1 + x_2) = b \iff x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $a(x_1x_2) = c \iff x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$

Applications directes

- **Racine évidente :** si l'on repère une racine évidente $x_1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, la seconde s'obtient instantanément par $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = \dfrac{c}{ax_1}$ (ou à l'aide de S).
- **Système somme-produit :** deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.