Première Spécialité — Lycée Yves Leborgne 2026 / 2027

Chapitre II : Probabilités conditionnelles

Partie 1

1) Rappels

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble de tous les résultats possibles est un ensemble fini appelé **univers**, généralement noté Ω.

Les éléments de Ω sont appelés les **éventualités** (ou **issues**).

Définition : Loi de probabilité

Soit un univers fini $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque éventualité e_i un nombre réel $p_i = P(\{e_i\})$ tel que :

- pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$;
- $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Définition : Événement

Un **événement** est une partie de l'univers Ω. Sa probabilité est la somme des probabilités des éventualités qui le composent.
En particulier : $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

Propriété : Contraire, union, intersection

Pour tous événements A et B d'un univers Ω :

- $\overline{A}$ (contraire de A) : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- $A \cap B$ (« A et B ») et $A \cup B$ (« A ou B ») vérifient :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Propriété : Équiprobabilité

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

▶ Voir exercice 1, fiche 1

▶ Voir exercice 2, fiche 1

2) Probabilité conditionnelle

▶ Voir exercice 3, fiche 1

A) Dans une situation d'équiprobabilité

Savoir que l'événement A est réalisé revient à **restreindre l'univers** à A : les seules issues possibles sont celles de A, et parmi elles, les issues favorables à B sont celles de $A \cap B$.

Propriété : Cas d'équiprobabilité

Dans une situation d'équiprobabilité, si A est un événement non vide, la probabilité de B **sachant** A est :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

B) Cas général

En divisant numérateur et dénominateur par $\text{Card}(\Omega)$, on obtient :

$$\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} = \frac{\dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)}}{\dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Cette dernière écriture ne fait plus intervenir l'équiprobabilité : on la prend comme définition générale.

Définition : Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$.
La **probabilité de B sachant A**, notée $P_A(B)$, est le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Attention

En général, $P_A(B) \neq P_B(A)$: « B sachant A » et « A sachant B » ne correspondent pas à la même restriction de l'univers.

Propriété : Probabilité de l'intersection

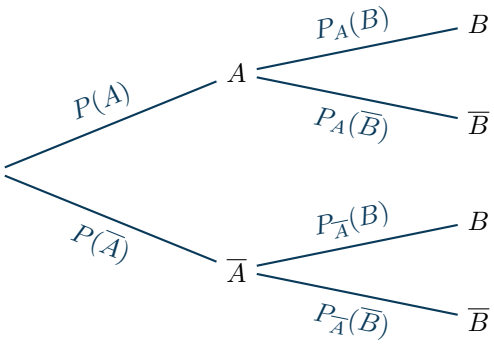
Si $P(A) > 0$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

▶ Voir exercice 4, fiche 1

3) Arbres pondérés

Une expérience en deux étapes se représente par un **arbre pondéré** :



Propriété : Règles de calcul sur un arbre

1) La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
2) La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent. Par exemple :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
3) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.

Définition : Partition de l'univers

Des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de probabilités non nulles forment une **partition** de Ω si :

1) ils sont deux à deux incompatibles : pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
2) leur réunion est l'univers : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Cas fréquent : si $0 < P(A) < 1$, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Propriété : Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω, alors pour tout événement B :
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

Cas d'une partition $\{A; \overline{A}\}$:
$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

Remarque

Sur l'arbre, c'est exactement la règle 3 : on additionne les probabilités de tous les chemins qui aboutissent à B.

▶ Voir exercice 5, fiche 1

▶ Voir exercice 6, fiche 1

4) Indépendance

Définition : Événements indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Lien avec le conditionnement

Si $P(A) > 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B.

Attention à ne pas confondre :

- **incompatibles** : $A \cap B = \emptyset$ (A et B ne peuvent pas se produire en même temps) ;
- **indépendants** : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (l'un n'influe pas sur l'autre).

Propriété

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration :

B est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$, donc :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

D'où, en utilisant l'indépendance de A et B :

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(\overline{A}) \times P(B)$$

□

▶ Voir exercice 7, fiche 1

Succession de deux épreuves indépendantes

Lorsqu'on enchaîne deux épreuves dont la seconde ne dépend pas du résultat de la première, on dit que les épreuves sont **indépendantes**. Sur l'arbre, les branches du second niveau portent alors les mêmes probabilités, quel que soit le résultat de la première épreuve.

Propriété

Pour deux épreuves indépendantes, la probabilité d'obtenir l'issue x à la première épreuve puis l'issue y à la seconde est :

$$P\big((x;y)\big) = P(x) \times P(y)$$

▶ Voir exercice 8, fiche 1