Première Spécialité Mathématiques

Fiche d'exercices : Polynômes du second degré

Exercice 1 : Pratique des identités remarquables et méthode de complétion du carré

1. Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :
   a) $A(x) = (x+5)^2$
   b) $B(x) = (x-4)^2$
   c) $C(x) = (2x-3)^2$
   d) $D(x) = (3x+1)(3x-1)$
2. Compléter les pointillés pour faire apparaître le début d'un carré parfait :
   a) $x^2 + 8x = (x + \dots)^2 - \dots$
   b) $x^2 - 10x = (x - \dots)^2 - \dots$
   c) $x^2 + 3x = (x + \dots)^2 - \dots$
3. En utilisant la méthode par complétion du carré (sans appliquer la formule de x_0), déterminer la forme canonique de chacun des trinômes suivants :
   a) $P_1(x) = x^2 - 6x + 13$
   b) $P_2(x) = 2x^2 + 12x + 10$
   c) $P_3(x) = -x^2 + 4x - 7$
   d) $P_4(x) = 3x^2 - 18x + 15$

Exercice 2 : Forme canonique

Soient les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad ; \quad g(x) = -2x^2 - 8x + 6 \quad ; \quad h(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Pour chacune de ces fonctions :

1. Déterminer sa forme canonique par la méthode de votre choix (formule ou ajustement).
2. Préciser les coordonnées du sommet S de la parabole représentative ainsi qu'une équation de son axe de symétrie vertical.
3. Indiquer si la parabole est orientée « vers le haut » ou « vers le bas », puis dresser le tableau de variations complet de la fonction (en faisant figurer l'extremum).

Exercice 3 : Discriminant et résolution d'équations du second degré

1. Pour chaque équation, identifier les coefficients a, b et c, calculer le discriminant Δ, puis déterminer l'ensemble des solutions réelles :
   a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   b) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
   c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
   d) $x^2 + 2x + 5 = 0$
   e) $-3x^2 + 7x - 2 = 0$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser systématiquement le discriminant Δ, en privilégiant une factorisation immédiate :
   a) $4x^2 - 25 = 0$
   b) $3x^2 - 12x = 0$

Exercice 4 : Signe d'un trinôme et résolution d'inéquations

1. Dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de chacun des trinômes suivants :
   a) $P_1(x) = x^2 - 2x - 8$
   b) $P_2(x) = -2x^2 + 5x - 2$
   c) $P_3(x) = 4x^2 - 12x + 9$
   d) $P_4(x) = -x^2 + x - 3$
2. En déduire l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :
   a) $x^2 - 2x - 8 > 0$
   b) $-2x^2 + 5x - 2 \leq 0$
   c) $-x^2 + x - 3 \geq 0$

Exercice 5 : Forme factorisée d'un trinôme du second degré

Pour chacune des fonctions polynômes suivantes, déterminer si elle est factorisable dans $\mathbb{R}$ en un produit de facteurs de degré 1.
Si oui, écrire explicitement sa forme factorisée ; si non, justifier pourquoi.

a) $f_1(x) = 2x^2 - 8x + 6$
b) $f_2(x) = -x^2 + 6x - 9$
c) $f_3(x) = 3x^2 + x + 2$
d) $f_4(x) = -2x^2 + 2x + 12$
e) $f_5(x) = 5x^2 - 20$

Exercice 6 : Recherche d'une racine évidente

1. Soit le trinôme $P(x) = 2x^2 - 7x + 5$.
   a) Calculer $P(1)$. Que peut-on en déduire pour le nombre 1 ?
   b) Rappeler l'expression du produit des racines $P = x_1 \times x_2$ en fonction des coefficients a et c.
   c) En déduire sans calculer le discriminant Δ la valeur de la seconde racine x_2.
   d) Vérifier le résultat obtenu à l'aide de la somme des racines $S = x_1 + x_2$.
2. Pour chacun des trinômes suivants, déterminer mentalement une racine évidente parmi $\{-2, -1, 1, 2\}$, puis calculer la seconde racine en utilisant le produit ou la somme des racines :
   a) $Q_1(x) = x^2 + 4x - 5$
   b) $Q_2(x) = 3x^2 + 5x + 2$
   c) $Q_3(x) = -2x^2 + 3x + 5$
   d) $Q_4(x) = 4x^2 - 7x + 3$