Corrigé du DS1 - Première spécialité mathématiques

Partie 1 : Automatismes (6 points)

1. **(0,5 pt)** Baisser un prix de 3 % revient à le multiplier par le coefficient multiplicateur :

$$CM = 1 - \frac{3}{100} = 1 - 0,03 = 0,97.$$

Le nouveau prix s'exprime donc en fonction de P par : $\mathbf{0,97P}$.

2. **(0,5 pt)** On utilise l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$(3x-1)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = \mathbf{9x^2 - 6x + 1}.$$

3. **(1 pt)**

- Les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

$$-5(x-1)(x+3) = 0 \iff x - 1 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

Les abscisses des points d'intersection sont donc $\mathbf{-3}$ et $\mathbf{1}$. *(0,5 pt)*

- En développant $f(x)$, le terme de plus haut degré est $-5x^2$, donc le coefficient dominant est $a = -5 < 0$. La parabole est donc **tournée vers le bas**. *(0,5 pt)*

4. **(0,5 pt)** On met les deux fractions au même dénominateur ($9 \times 7 = 63$) :

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 7}{9 \times 7} = \frac{49}{63} \quad \text{et} \quad \frac{5}{7} = \frac{5 \times 9}{7 \times 9} = \frac{45}{63}.$$

Comme $49 > 45$, on a bien $\frac{49}{63} > \frac{45}{63}$. L'affirmation est donc **vraie**.

5. **(1 pt)** Graphiquement, les solutions de $f(x) \leq 10$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ situés sur ou en dessous de la droite horizontale d'équation $y = 10$. On lit :

$$\mathcal{S} = [\mathbf{-3}; \mathbf{-1}] \cup [\mathbf{8}; \mathbf{9,5}].$$

(0,5 pt par intervalle correct)

6. **(1 pt)** La moyenne pondérée vaut 14, ce qui se traduit par l'équation :

$$\frac{12 \times 1 + 10 \times 1 + 14 \times 1 + x \times 2}{1+1+1+2} = 14 \iff \frac{36 + 2x}{5} = 14 \iff 36+2x = 70 \iff 2x = 34 \iff x = \mathbf{17}.$$

(0,5 pt pour la mise en équation + 0,5 pt pour le résultat)

7. **(0,5 pt)** En utilisant les propriétés des puissances $(a^m)^p = a^{m \times p}$ et $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$:

$$\frac{(a^5)^2}{a^{-10}} = \frac{a^{5 \times 2}}{a^{-10}} = \frac{a^{10}}{a^{-10}} = a^{10-(-10)} = a^{10+10} = \mathbf{a^{20}}.$$

8. **(1 pt)** Soient $A(0;-5)$ et $B(15;0)$.

- Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-(-5)}{15-0} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}. \quad \textit{(0,5 pt)}$$

- Le point $A(0;-5)$ appartient à l'axe des ordonnées, donc l'ordonnée à l'origine est $p = -5$. *(0,5 pt)*

Une équation réduite de cette droite est donc : $\mathbf{y = \frac{1}{3}x - 5}$.

Partie 2 : Second degré (14 points)

Exercice 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré avec $a = -2$, $b = 4$ et $c = 6$.

1. **(1,5 pt) Forme canonique :** On calcule l'abscisse x_0 du sommet puis son image $f(x_0)$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-2)} = -\frac{4}{-4} = 1 \quad \text{et} \quad f(x_0) = f(1) = -2 \times 1^2 + 4 \times 1 + 6 = -2 + 4 + 6 = 8.$$

La forme canonique $f(x) = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$ donne donc :

$$\mathbf{f(x) = -2(x - 1)^2 + 8.}$$

(0,5 pt pour x_0, 0,5 pt pour $f(x_0)$, 0,5 pt pour l'écriture finale)

2. **(0,5 pt) Axe de symétrie :** La parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $\mathbf{x = 1}$.

3. **(0,5 pt) Coordonnées du sommet :** Le sommet S de la parabole a pour coordonnées $\mathbf{S(1; 8)}$.

4. **(1 pt) Tableau de variations :** Comme $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas : f est croissante sur $]-\infty; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

(0,5 pt pour les flèches + 0,5 pt pour les valeurs 1 et 8)

5. **(1,5 pt) Racines de f :** On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64.$$

Comme $\Delta > 0$ ($\sqrt{\Delta} = 8$), l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 8}{2 \times (-2)} = \frac{-12}{-4} = \mathbf{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 8}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = \mathbf{-1}.$$

(0,5 pt pour $\Delta = 64$, 0,5 pt pour x_1, 0,5 pt pour x_2)

6. **(1 pt) Forme factorisée :** En utilisant la formule $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, on obtient :

$$\mathbf{f(x) = -2(x - 3)(x + 1).}$$

7. **(1 pt) Tableau de signes :** Comme $a = -2 < 0$, $f(x)$ est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines et positif entre les racines :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(0,5 pt pour le placement des racines + 0,5 pt pour les signes)

Exercice 2 (7 points)

Partie A : Modélisation (2 points)

1. **(0,5 pt)** Soit L la mesure de l'autre côté du rectangle. Le périmètre vaut 100 cm, donc :

$$2(x + L) = 100 \iff x + L = 50 \iff \mathbf{L = 50 - x.}$$

2. **(0,5 pt)** Les dimensions d'un rectangle sont strictement positives, donc $x > 0$ et $50 - x > 0 \iff x < 50$. Ainsi, $\mathbf{x \in]0; 50[}$.

3. **(1 pt)** L'aire $A(x)$ d'un rectangle est le produit de ses deux côtés :

$$A(x) = x(50 - x) = 50x - x^2 = \mathbf{-x^2 + 50x.}$$

Partie B : Étude de la fonction (3 points)

On étudie la fonction A définie sur $]0;50[$ par $A(x) = -x^2 + 50x$ (avec $a = -1$, $b = 50$ et $c = 0$).

1. **(1 pt) Forme canonique :**

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2 \times (-1)} = 25 \quad \text{et} \quad A(x_0) = A(25) = -25^2 + 50 \times 25 = -625 + 1250 = 625.$$

La forme canonique est donc : $\mathbf{A(x) = -(x - 25)^2 + 625}$. *(0,5 pt pour x_0 et $A(x_0)$ + 0,5 pt pour l'écriture)*

2. **(1 pt) Tableau de variations sur $]0;50[$:** Comme $a = -1 < 0$, la fonction A est croissante sur $]0;25]$ puis décroissante sur $[25;50[$. De plus, $A(0) = 0$ et $A(50) = -50^2 + 50 \times 50 = 0$.

x	0		25		50
$A(x)$	0	↗	625	↘	0

(0,5 pt pour les variations + 0,5 pt pour les valeurs)

3. **(0,5 pt)** D'après le tableau de variations, l'aire maximale du rectangle est de **625** $\mathbf{cm^2}$, et elle est atteinte pour $\mathbf{x = 25}$ cm.

4. **(0,5 pt)** Lorsque $x = 25$ cm, l'autre côté mesure $50 - x = 50 - 25 = 25$ cm. Les deux côtés ont la même longueur : le rectangle d'aire maximale est donc **un carré** (de côté 25 cm).

Partie C : Résolution d'équation (2 points)

1. **(0,5 pt)** On cherche $x \in]0;50[$ tel que $A(x) = 400$:

$$-x^2 + 50x = 400 \iff -x^2 + 50x - 400 = 0 \iff \mathbf{x^2 - 50x + 400 = 0}.$$

2. **(1,5 pt)** On résout $x^2 - 50x + 400 = 0$ ($a = 1$, $b = -50$, $c = 400$) :

$$\Delta = (-50)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 2500 - 1600 = 900.$$

Comme $\Delta > 0$ ($\sqrt{\Delta} = 30$), l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{50 - 30}{2} = \frac{20}{2} = 10 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{50 + 30}{2} = \frac{80}{2} = 40.$$

Les deux solutions appartiennent bien à l'intervalle $]0;50[$.

- Si $x = 10$ cm, l'autre côté mesure $50 - 10 = 40$ cm.
- Si $x = 40$ cm, l'autre côté mesure $50 - 40 = 10$ cm.

Dans les deux cas, le rectangle mesure **10** cm **sur 40** cm. *(0,5 pt pour Δ, 0,5 pt pour les deux racines, 0,5 pt pour la conclusion sur les dimensions)*