1re GÉNÉRALE — Enseignement Scientifique – Mathématiques

Chapitre 2 : Modélisation des phénomènes d'évolution

Partie 1 : Croissance linéaire discrète et suites arithmétiques

1) De la situation concrète à la notion de suite arithmétique

Situation introductive : Épargne mensuelle régulière

Au 1er janvier, une personne dispose d'un capital initial de 150 sur un compte d'épargne. Chaque mois, elle décide d'y verser la somme fixe de 30 .

- Au départ (étape 0), la somme disponible est : 150 .
- Au bout d'un mois (étape 1), la somme devient : $150 + 30 = 180$.
- Au bout de deux mois (étape 2), la somme devient : $180 + 30 = 210$.
- Au bout de trois mois (étape 3), la somme devient : $210 + 30 = 240$.

Pour modéliser cette évolution discrète (mois par mois), on associe à chaque entier naturel n (le nombre de mois écoulés) la quantité notée $u(n)$, ou plus usuellement en notation indicielle : u_n.
On note ainsi : $u_0 = 150$, $u_1 = 180$, $u_2 = 210$, $u_3 = 240$, etc.

Définition : Suite arithmétique et relation de récurrence

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si l'on passe d'un terme au terme suivant en **ajoutant toujours le même nombre** réel r.
Ce nombre r est appelé la **raison** de la suite.
Pour tout entier naturel n, elle est définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Caractérisation pratique

Pour justifier qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de vérifier que la différence entre deux termes successifs est toujours la même pour tout n :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Dans l'exemple de l'épargne, la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 150$ et de raison $r = 30$.

Cas d'une raison négative

Une cuve contient initialement 1 000 litres d'eau. Une vanne ouverte laisse s'écouler régulièrement 40 litres chaque minute. En notant v_n le volume d'eau en litres restant au bout de n minutes :

- Terme initial : $v_0 = 1\,000$.
- Relation de passage : $v_{n+1} = v_n - 40 = v_n + (-40)$.

La suite (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1\,000$ et de raison négative $r = -40$.

2) Formule explicite : terme de rang n

Propriété : Calcul direct de u_n en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, le terme général u_n est donné par la formule explicite :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Principe de construction

Pour atteindre le terme u_n en partant de u_0, on ajoute n fois la raison r :

$$u_1 = u_0 + r \qquad u_2 = u_0 + 2r \qquad \dots \qquad u_n = u_0 + n \times r$$

Si la suite commence au rang 1 avec le premier terme u_1, on a ajouté $(n-1)$ fois la raison :

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

Exemple

En reprenant l'exemple du compte d'épargne ($u_0 = 150$ et $r = 30$) :

- L'expression directe du capital après n mois est : $u_n = 150 + 30n$.
- Au bout de deux ans ($n = 24$ mois), le capital accumulé est de :

$$u_{24} = 150 + 24 \times 30 = 150 + 720 = 870$$

3) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété : Règle du signe de la raison

Le sens de variation d'une suite arithmétique (u_n) dépend uniquement du **signe de sa raison** r :

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est **strictement croissante**.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est **strictement décroissante**.
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est **constante**.

Justification

Pour étudier le sens de variation, on étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est constant et identique à celui du réel r.

4) Représentation graphique

Propriété : Caractère discret et disposition sur une droite

Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées :

$$M(n\,;\,u_n)$$

Tous ces points **se situent sur une même droite**.

Distinction essentielle entre droite et points isolés

Attention à ne pas confondre le tracé :

- Les points $(n\,;\,u_n)$ appartiennent bien à une droite, mais ils sont **isolés** les uns des autres car l'indice n ne prend que des valeurs entières ($n = 0, 1, 2, \dots$).
- Contrairement à une fonction continue dont la courbe est une ligne ininterrompue, on ne doit **jamais relier** les points d'une suite par un trait continu.