1re GÉNÉRALE — Enseignement Scientifique – Mathématiques

Chapitre 1 : Pourcentages et taux d'évolution

Module spécifique : Automatismes et gestion de l'information chiffrée

1) Proportions et calcul d'un pourcentage

Définition : Proportion d'une sous-population

Soit une population totale E d'effectif noté N et une sous-population A d'effectif noté n (avec $A \subset E$ et $N > 0$).
La **proportion** (ou fréquence) de la sous-population A dans E est le quotient :

$$p = \frac{n}{N} = \frac{\text{effectif de la sous-population}}{\text{effectif de la population totale}}$$

Propriété : Propriétés fondamentales

- Une proportion p est toujours comprise entre 0 et 1 : $0 \leq p \leq 1$.
- Si $p > 1$, c'est le signe d'une inversion entre le numérateur et le dénominateur.

Les trois écritures d'une proportion et la lecture en pourcentage

Un pourcentage n'est rien d'autre qu'une fraction dont le dénominateur est 100.
Pour tout nombre décimal p, on a la relation :

$$p = \frac{p \times 100}{100} = (p \times 100)\,\%$$

Exemple d'écriture :

- Écriture fractionnaire : $p = \frac{7}{25}$
- Écriture décimale exacte : $p = 0{,}28$
- Écriture en pourcentage : $p = \frac{28}{100} = 28\,\%$

Rappel d'écriture : Multiplier par 100 sert uniquement à décaler la virgule pour lire le nombre de centièmes. Écrire $0{,}28 \times 100 = 28\,\%$ est faux (car $28 \neq 0{,}28$).

Propriété : Les trois formules fondamentales liant p, n et N

Les grandeurs p (proportion sous forme décimale ou fractionnaire), n (effectif partiel) et N (effectif total) vérifient les relations équivalentes suivantes :

- **Pour calculer la proportion p :**
$$p = \frac{n}{N}$$
- **Pour calculer l'effectif de la sous-population n (prendre un pourcentage) :**
$$n = p \times N$$
- **Pour retrouver l'effectif total N :**
$$N = \frac{n}{p}$$

2) Taux d'évolution et Coefficient Multiplicateur

A) Taux d'évolution (variation relative)

Définition : Variation absolue et taux d'évolution τ

Une grandeur passe d'une **valeur initiale** V_I non nulle à une **valeur finale** V_F.

— La **variation absolue** est la différence :

$$\Delta V = V_F - V_I$$

— Le **taux d'évolution** (ou variation relative), noté τ (lettre grecque *tau*), est le quotient :

$$\tau = \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{\Delta V}{V_I}$$

Le taux d'évolution τ peut être **positif ou négatif** selon le sens de la variation, et s'exprime usuellement sous forme d'un **pourcentage**.

Signe de τ et sens de variation

— Si $V_F > V_I$, alors $\tau > 0$: la variation est positive, il s'agit d'une **hausse** (augmentation).

— Si $V_F < V_I$, alors $\tau < 0$: la variation est négative, il s'agit d'une **baisse** (diminution).

— Le dénominateur de la formule est **toujours** la valeur **initiale** V_I, jamais la valeur finale.

Exemple

Le prix de l'essence est passé de 1,60 (V_I) à 1,84 (V_F).

$$\tau = \frac{1{,}84 - 1{,}60}{1{,}60} = \frac{0{,}24}{1{,}60} = +0{,}15 = +15\,\%$$

Le prix du carburant a augmenté de $15\,\%$.

B) Le Coefficient Multiplicateur (CM)

Propriété : Lien entre taux d'évolution τ et coefficient multiplicateur

Faire évoluer une valeur initiale V_I d'un taux τ, c'est la multiplier par un nombre appelé le **coefficient multiplicateur**, noté CM :

$$CM = 1 + \tau \quad \text{avec } \tau \text{ exprimé sous forme décimale (positif ou négatif).}$$

On a alors la relation fondamentale :

$$V_F = V_I \times CM$$

Règles directes de calcul mental

— Pour une **hausse** de valeur absolue $|\tau|$: $\tau > 0$, donc $CM = 1 + \tau > 1$.
Exemples : Une hausse de $8\,\%$ $(\tau = +0{,}08) \implies CM = 1{,}08$; une hausse de $45\,\%$ $(\tau = +0{,}45) \implies CM = 1{,}45$.

— Pour une **baisse** de valeur absolue $|\tau|$: $\tau < 0$, donc $CM = 1 + \tau < 1$ (car on ajoute un

nombre négatif).
Exemples : Une baisse de 20 % ($\tau = -0{,}20$) $\Longrightarrow$ $CM = 0{,}80$; une baisse de 7 % ($\tau = -0{,}07$) $\Longrightarrow$ $CM = 0{,}93$.

Propriété : Retrouver la valeur initiale

Connaissant la valeur finale V_F et le coefficient multiplicateur CM ($CM \neq 0$), la valeur initiale V_I est donnée par :

$$V_I = \frac{V_F}{CM}$$

Exemple

Un article soldé à $-20\,\%$ ($\tau = -0{,}20$) coûte 72 . Quel était son prix initial avant les soldes ?

— Le coefficient multiplicateur associé est : $CM = 1 + (-0{,}20) = 0{,}80$.

— Le prix avant les soldes était donc de :

$$V_I = \frac{72}{0{,}80} = 90$$

3) Évolutions composées

A) Évolutions successives

Propriété : Multiplication des coefficients multiplicateurs

Lorsqu'une grandeur subit plusieurs évolutions successives de coefficients multiplicateurs respectifs $CM_1, CM_2, \ldots, CM_k$, le coefficient multiplicateur global est égal au **produit** de ces coefficients :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_k$$

Le taux d'évolution global τ_{global} s'obtient ensuite par la relation :

$$\tau_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1$$

Avertissement fondamental

On n'additionne JAMAIS les pourcentages d'évolutions successives !
Une hausse de 10 % suivie d'une autre hausse de 10 % ne correspond pas à un taux global de +20 %.

$$CM_{\text{global}} = 1{,}10 \times 1{,}10 = 1{,}21 \Longrightarrow \tau_{\text{global}} = 1{,}21 - 1 = +0{,}21 = +21\,\%$$

B) Évolution réciproque

Définition : Taux d'évolution réciproque $\tau_{\text{réc}}$

Soit une grandeur passant d'une valeur initiale V_I à une valeur finale V_F selon un coefficient multiplicateur $CM \neq 0$.
L'**évolution réciproque** est l'évolution qui permet de revenir de la valeur finale V_F à la valeur de départ V_I.

Propriété : Calcul du coefficient et du taux réciproques

Le coefficient multiplicateur réciproque $CM_{\text{réc}}$ est l'**inverse** du coefficient multiplicateur initial :

$$CM_{\text{réc}} = \frac{1}{CM}$$

Le taux d'évolution réciproque $\tau_{\text{réc}}$ est alors donné par :

$$\tau_{\text{réc}} = CM_{\text{réc}} - 1 = \frac{1}{CM} - 1$$

Exemple

Le prix d'un smartphone diminue de 50 % ($\tau = -0{,}50$). De quel pourcentage doit-il ensuite évoluer pour retrouver exactement son prix initial ?

— Une baisse de 50 % correspond à $CM = 1 + (-0{,}50) = 0{,}5$.

— Le coefficient multiplicateur réciproque est :

$$CM_{\text{réc}} = \frac{1}{0{,}5} = 2$$

— Le taux réciproque est donc :

$$\tau_{\text{réc}} = 2 - 1 = +1 = +100\,\%$$

Pour compenser une baisse de 50 %, le prix doit augmenter de 100 % (et non de 50 %).