1re GÉNÉRALE — Enseignement Scientifique – Mathématiques

Fiche d'exercices : Suites arithmétiques

Modélisation de variations linéaires discrètes et calculs de termes

Partie 1 : Automatismes et application directe du cours

Exercice 1 : Reconnaissance et calculs immédiats

Dans chaque cas, indiquer si la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n est arithmétique. Si oui, préciser son premier terme et sa raison, puis donner son sens de variation.

1. $u_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$.
2. $u_0 = 80$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 7{,}5$.
3. $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n - 9$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 2n$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n - 7$.

Exercice 2 : Passage de la forme récurrente à la forme explicite

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 45$ et de raison $r = 6$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.
3. En déduire la valeur du terme u_{30}.
4. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

Exercice 3 : Identification à partir de deux termes

Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme v_0 et de raison r. On sait que $v_0 = 14$ et que $v_5 = 34$.

1. Rappeler l'expression de v_5 en fonction de v_0 et r.
2. En déduire la valeur de la raison r.
3. Exprimer v_n en fonction de n, puis calculer v_{20}.

Partie 2 : Problèmes de modélisation (style Bac)

Exercice 4 : Modélisation de l'évolution d'une population animale

En juin 2019, une population de 200 marmottes a été introduite dans un massif montagneux où cette espèce était absente. Un zoologue en charge de ce projet souhaite modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps.
Il constate qu'entre juin 2019 et juin 2020, la population a augmenté de 20 individus.
Le zoologue propose un premier modèle où la population augmente de 20 individus tous les ans. On note alors u_n la population de marmottes que l'on peut estimer à l'aide de ce modèle en juin $2019 + n$. On a donc $u_0 = 200$.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. À combien peut-on estimer le nombre de marmottes en juin 2025 selon ce modèle ?
4. En juin 2025, un nouveau décompte sur le terrain a dénombré 355 individus. Ce premier modèle semble-t-il adapté à la situation observée ? Justifier la réponse.

Exercice 5 : Végétalisation urbaine et croissance d'arbres

Un maire souhaite végétaliser sa ville. Pour cela, il décide de planter des mûriers platanes dans les différents parcs de la commune.
Au moment de la plantation, un mûrier platane mesure 1 mètre. On suppose que, chaque année, la hauteur de l'arbre augmente de 40 cm. Pour tout entier naturel n, on note u_n la hauteur de l'arbre, exprimée en mètres, n années après sa plantation. Ainsi, $u_0 = 1$.

1. a. Calculer u_1.
   b. Déterminer la hauteur de l'arbre deux années après sa plantation.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. a. Calculer la hauteur prévisible de l'arbre au bout de 10 ans.
   b. Déterminer au bout de combien d'années le mûrier atteindra pour la première fois une hauteur de 9 mètres.

Exercice 6 : Sens de variation et comparaison de modèles

Une commune dispose d'une réserve d'eau de secours de 1 200 m^3. Lors d'une période de sécheresse estivale, on prélève chaque jour un volume constant de 45 m^3 pour alimenter les besoins prioritaires. On note w_n le volume d'eau restant dans la réserve au bout de n jours de prélèvement, avec $w_0 = 1\,200$.

1. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.
2. En déduire la nature de la suite (w_n) et justifier son sens de variation.
3. Donner l'expression explicite de w_n en fonction de n.
4. Déterminer le volume d'eau disponible dans la réserve après 15 jours.
5. Combien de jours complets cette réserve peut-elle subvenir à ces prélèvements avant d'être totalement épuisée ?