Chapitre I : Distance et valeur absolue — Fiche d'exercices

Exercice 1 : Problème guidé : Choix d'une formule d'abonnement

Un cinéma de quartier propose deux formules tarifaires pour l'année :

- **Formule A :** Plein tarif à 9,50 la séance, sans abonnement.
- **Formule B :** Carte d'abonnement annuelle de 44 , puis 4 par séance.

On souhaite déterminer le nombre de séances annuel à partir duquel la Formule B devient plus avantageuse (ou d'un coût inférieur ou égal) que la Formule A.

1.) Soit x le nombre de séances de cinéma fréquentées dans l'année. Exprimer en fonction de x le prix total payé $P_A(x)$ avec la formule A, puis le prix total $P_B(x)$ avec la formule B.

2.) Traduire le problème par une inéquation d'inconnue x.

3.) Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$ et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle non borné.

4.) Conclure en répondant précisément au problème posé (tenir compte de la nature concrète de la variable x).

Exercice 2 : Problème : Charge utile d'un véhicule utilitaire

Un artisan carreleur charge des sacs de colle dans son véhicule utilitaire. Le véhicule vide pèse 1 450 kg et sa masse maximale autorisée en charge (PTAC) est fixée à 2 500 kg.
L'artisan pèse 80 kg et a déjà chargé pour 270 kg d'outillage divers. Il souhaite transporter des sacs de colle pesant chacun 20 kg.
Déterminer, en modélisant la situation par une inéquation, l'ensemble des valeurs possibles pour le nombre n de sacs de colle qu'il peut charger en toute légalité. Donner la solution sous forme d'un intervalle de réels admissibles, puis préciser le nombre maximal de sacs.

Exercice 3 : Problème : Régulation thermique d'une serre

Pour garantir la germination optimale de graines tropicales, la température intérieure T (en degrés Celsius) d'une serre automatisée doit respecter simultanément deux contraintes :

- La température ne doit pas descendre en dessous de 18°C pour éviter tout arrêt végétatif ;
- Elle ne doit pas dépasser 24°C afin d'éviter le dessèchement des jeunes pousses.

Modéliser cette situation à l'aide d'un encadrement (ou d'un système de deux inéquations), préciser l'intervalle des températures T tolérées, puis représenter cet ensemble sur une droite graduée.

Exercice 4 : Calculs directs de valeurs absolues

Calculer et donner le résultat sous forme d'un nombre entier ou décimal exact :

a) $|-19|$ **c)** $|-0{,}04|$ **e)** $|-7-9|$ **g)** $\left|-\frac{7}{2}\right|$

b) $|14{,}3|$ **d)** $|8-15|$ **f)** $|5-5|$ **h)** $|-3\times 4|$

Écrire chaque expression sans les barres de valeur absolue en justifiant par le signe de la quantité intérieure :

a) $|\pi-3|$ **c)** $|\sqrt{10}-3|$ **e)** $|3-\sqrt{7}|$

b) $|\sqrt{2}-2|$ **d)** $|5-2\pi|$ **f)** $|2\sqrt{3}-4|$

Exercice 5 : Distance entre deux nombres sur la droite graduée

Calculer la distance $d(a, b)$ entre les nombres réels a et b à l'aide de la valeur absolue dans chaque cas :

a) $a = 11$ et $b = 4$

b) $a = -6$ et $b = 5$

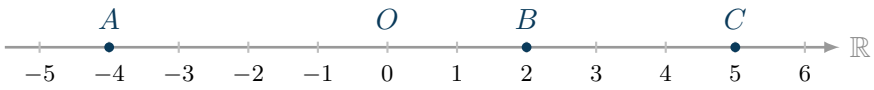
c) $a = -8$ et $b = -13$

d) $a = 2{,}7$ et $b = -1{,}3$

e) $a = -\dfrac{3}{4}$ et $b = \dfrac{5}{4}$

f) $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = -\dfrac{2}{3}$

Sur la droite graduée ci-dessous d'origine O et d'unité 1 cm (une graduation représente 1 unité), lire directement les distances AB, AC et BC, puis vérifier chaque résultat par un calcul à l'aide de la valeur absolue :



Exercice 6 : Tableau de correspondance multiple

Compléter les cases vides du tableau ci-dessous en établissant les équivalences demandées :

Distance avec x	Valeur absolue	Intervalle	Représentation graphique
$d(x, 4) \leq 3$			
	$\lvert x - 5\rvert < 2$		
		$x \in [-2\ ;\ 6]$	
$d(x, 0) < 5$			
	$\lvert x - (-1)\rvert \leq 4$		
		$x \in]-4\ ;\ 2[$	
$d(x, -3) \leq 1{,}5$			
	$\lvert x + 2\rvert < 3$		

Exercice 7 : Résolution géométrique d'inéquations avec valeur absolue

Pour chaque inéquation, expliciter l'abscisse du centre a et le rayon r, représenter la situation sur la droite des réels, puis donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle :

a) $\lvert x - 7\rvert \leq 3$

b) $\lvert x - 1\rvert < 5$

c) $\lvert x + 4\rvert \leq 2$

d) $\lvert x + 3\rvert < 4$

e) $\lvert x - 2{,}5\rvert \leq 1{,}5$

f) $\lvert x\rvert < 6$

Exercice 8 : Caractérisation d'un intervalle par une valeur absolue

Pour chaque intervalle, calculer son centre c, son rayon r, puis caractériser l'appartenance d'un réel x à cet intervalle sous la forme $\lvert x - c\rvert \leq r$ ou $\lvert x - c\rvert < r$:

a) $I_1 = [3\ ;\ 9]$

b) $I_2 =]-5\ ;\ 1[$

c) $I_3 = [-7\ ;\ -1]$

d) $I_4 =]-2\ ;\ 8[$

e) $I_5 = [-0{,}8\ ;\ 0{,}4]$

f) $I_6 =]12\ ;\ 18[$

Exercice 9 : Modélisation concrète : tolérances d'usinage

Une usine fabrique des tiges métalliques cylindriques de diamètre théorique $d_0 = 20$ mm.
La production est jugée conforme lorsque le diamètre réel x (exprimé en millimètres) vérifie l'inégalité suivante :

$$|x - 20| \leq 0{,}15$$

1.) Traduire cette condition à l'aide d'une distance sur la droite numérique. Préciser le centre et la tolérance (rayon).

2.) Une série de mesures donne les diamètres suivants pour quatre tiges prélevées au hasard :

$$x_1 = 20{,}12 \text{ mm} \qquad x_2 = 19{,}82 \text{ mm} \qquad x_3 = 20{,}16 \text{ mm} \qquad x_4 = 19{,}95 \text{ mm}$$

Indiquer, pour chaque pièce, si elle est acceptée ou refusée en justifiant par un calcul à l'aide de la valeur absolue.