3) Arithmétique

A) Multiples et diviseurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Définition : Multiple et diviseur

Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$.
On dit que a **est un multiple de** b, ou que b **divise** a, s'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$a = k \times b$$

Recherche de multiples et diviseurs

Le nombre -35 est un multiple de 7 car on a l'égalité $-35 = (-5) \times 7$ avec $-5 \in \mathbb{Z}$.
Le nombre -4 divise 28 car on peut écrire $28 = (-7) \times (-4)$.
Le nombre 6 ne divise pas 20 car le quotient $\dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3}$ n'est pas un nombre entier relatif.

Propriétés immédiates

Pour tout entier relatif a, on a $a = a \times 1$, donc 1 divise tous les entiers relatifs.
Pour tout entier relatif b non nul, on a $0 = 0 \times b$, donc 0 est un multiple de tout entier non nul.

Propriété : Somme de deux multiples

Soit a un entier relatif non nul. La somme de deux multiples de a est elle-même un multiple de a.

Démonstration dans le cas $a = 3$

Soient n et m deux multiples de 3.
Puisque n est un multiple de 3, il existe un entier relatif k tel que $n = 3k$.
Puisque m est un multiple de 3, il existe un entier relatif k' tel que $m = 3k'$.
On additionne ces deux nombres en factorisant par 3 :

$$n + m = 3k + 3k' = 3(k + k')$$

Comme k et k' sont des entiers relatifs, leur somme $K = k + k'$ est un entier relatif.
On a donc écrit $n + m = 3K$ avec $K \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, la somme $n + m$ est bien un multiple de 3.

B) Nombres pairs et nombres impairs

Définition : Parité d'un entier

Soit n un entier relatif.
On dit que l'entier n est **pair** lorsqu'il est un multiple de 2, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n = 2k$$

On dit que l'entier n est **impair** lorsqu'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n = 2k + 1$$

Un entier relatif est soit pair, soit impair, jamais les deux.

Reconnaître la parité d'un entier

Le nombre -14 est pair car $-14 = 2 \times (-7)$.
Le nombre 19 est impair car $19 = 2 \times 9 + 1$.

Propriété : Carré d'un nombre impair

Le carré de tout entier impair est un entier impair.

Démonstration par développement algébrique

Soit n un entier relatif impair.
D'après la définition, il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$.
Calculons son carré en utilisant une identité remarquable :

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

En factorisant par 2 sur les deux premiers termes, on obtient :

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Puisque k est un entier relatif, le nombre $K = 2k^2 + 2k$ est également un entier relatif.
On aboutit à l'égalité $n^2 = 2K + 1$ avec $K \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, le nombre n^2 est bien un entier impair.

C) Nombres premiers et fractions irréductibles

Définition : Nombre premier

Un nombre entier naturel est dit **premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.
Les premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.
Le nombre 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur positif.

Propriété : Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en un produit de facteurs premiers, et cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Application : simplification de fraction

Pour rendre irréductible la fraction $\frac{180}{126}$, on décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers :

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \qquad \text{et} \qquad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

En simplifiant par les facteurs communs $2 \times 3^2 = 18$, on obtient la forme irréductible :

$$\frac{180}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3^2 \times 5}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{10}{7}$$

Ressource numérique (Script Python) : ▶ liste des nombres premiers et décomposition en Python