SECONDE — Lycée Yves Leborgne 2026 / 2027

Chapitre 2 : Généralités sur les fonctions

1) Notion de fonction et approche graphique

A) Exemple 1 : Le prix des tomates (modèle proportionnel)

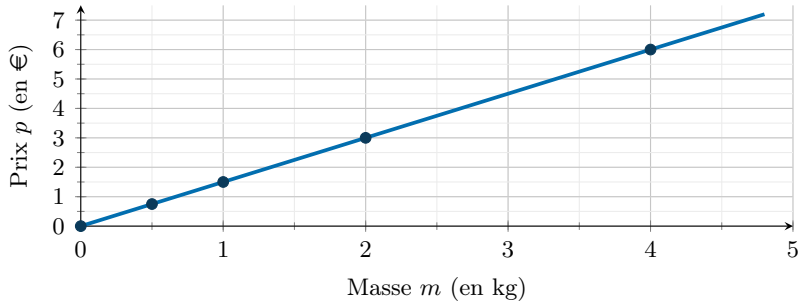
Exemple 1 : Achat de tomates au marché

Au marché, les tomates sont vendues à 1,50 € le kilogramme. Le prix payé dépend directement de la masse achetée :

Masse m (en kg)	0	0,5	1	2	4
Prix p (en €)	0	0,75	1,50	3	6

Le prix est proportionnel à la masse : pour obtenir le prix, on multiplie la masse par 1,5.
Dans un repère, la représentation graphique d'une telle situation de proportionnalité est une **droite passant par l'origine**.

Prix à payer en fonction de la masse achetée



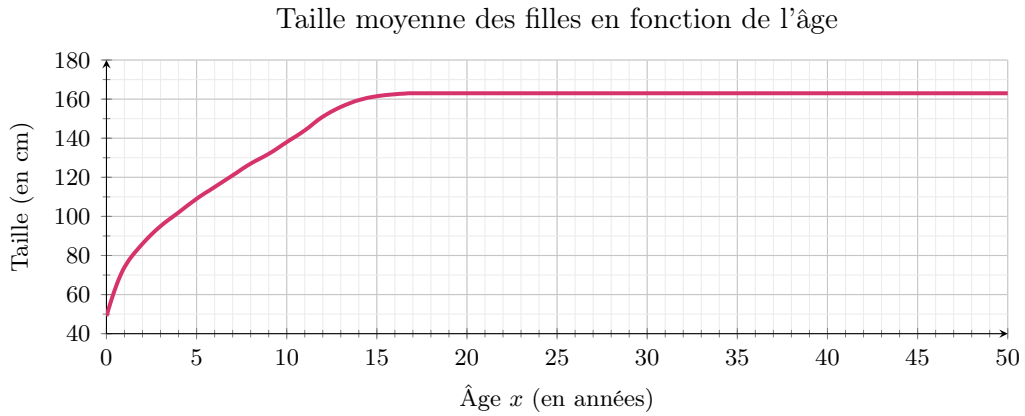
B) Exemple 2 : La croissance d'un enfant (limite de la proportionnalité)

Exemple 2 : Évolution de la taille moyenne des filles

À l'âge de 1 an, un enfant mesure en moyenne environ 74 cm. Si sa taille grandissait de manière strictement proportionnelle à son âge :

- à 5 ans, il mesurerait $5 \times 74 = 370$ cm, soit presque 4 mètres ;
- à 50 ans, il mesurerait $50 \times 74 = 37$ mètres ;
- à la naissance (0 an), il mesurerait exactement 0 cm.

Ce modèle linéaire ne convient pas. La taille dépend bien de l'âge, mais selon une relation différente, visible sur la courbe issue d'observations statistiques :



Constatations directes sur ce graphique :

- à l'âge de 5 ans, la taille moyenne est de 109 cm ;
- la taille de 150 cm est atteinte vers l'âge de 11,8 ans ;
- la taille est constante à 163 cm pour tout âge de 17 ans à 50 ans ;
- la valeur 180 cm n'est jamais atteinte sur cet échantillon.

À chaque âge correspond **une et une seule** taille.

C) Définition, vocabulaire et lecture graphique

Définition : Notion de fonction

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombres réels.
Définir une **fonction** f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à chaque nombre réel x de $\mathcal{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$.

- $\mathcal{D}$ est l'**ensemble de définition** de la fonction f.
- La lettre x désigne la **variable**.
- Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.
- Si un réel y vérifie $f(x) = y$, le nombre x est un **antécédent** de y par f.

Notation de la fonction : $f : x \longmapsto f(x)$.

Propriété : Unicité de l'image et multiplicité des antécédents

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

- Chaque nombre x appartenant à $\mathcal{D}$ possède **une seule et unique** image par f.
- Un nombre réel y peut posséder **aucun, un ou plusieurs** antécédents par f.

Définition : Courbe représentative

Dans le plan muni d'un repère, la **courbe représentative** d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}$, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble de tous les points du plan dont les coordonnées sont :

$$M\big(x\,;\,f(x)\big) \quad \text{avec } x \in \mathcal{D}$$

Détermination graphique d'une image et d'antécédents

- **Pour lire l'image d'un nombre x :** On part de la valeur x sur l'axe des abscisses, on se déplace verticalement jusqu'à rencontrer la courbe $\mathcal{C}_f$, puis on lit l'ordonnée correspondante sur l'axe vertical.
- **Pour lire le ou les antécédents d'un nombre y :** On repère y sur l'axe des ordonnées, on trace la droite horizontale passant par cette hauteur, puis on relève sur l'axe des abscisses les positions de toutes les intersections avec la courbe.

Application du vocabulaire aux Exemples 1 et 2

- Sur l'Exemple 1 (prix des tomates) :
  - Une masse étant obligatoirement positive ou nulle, l'ensemble de définition est l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
  - L'image de 2 est 3 ; l'antécédent de 6 est 4.
- Sur l'Exemple 2 (croissance d'une fille) :
  - Les données médicales n'étant collectées que de la naissance jusqu'à 50 ans, l'ensemble de définition est $[0\,;50]$. En dehors, la fonction n'est pas définie.
  - L'image de 5 est 109, notée $f(5) = 109$.
  - 150 possède un seul antécédent, qui est environ 11,8.
  - 163 possède une infinité d'antécédents : l'intervalle $[17\,;50]$.
  - 180 ne possède aucun antécédent.

2) Du graphique aux expressions algébriques

A) Expression algébrique d'une fonction

Définir une fonction par une **formule explicite** (ou expression algébrique) consiste à exprimer la valeur $f(x)$ par une suite de calculs littéraux portant directement sur la variable x.

Retour sur l'Exemple 1

Pour les tomates vendues 1,50 € le kilo, on définit la fonction p sur son ensemble de définition $\mathcal{D} = [0\,;+\infty[$ par la formule :

$$p(m) = 1{,}5\,m$$

La formule permet d'obtenir les résultats par le calcul sans passer par le tracé :

- **Calcul d'une image :** pour déterminer l'image de 3, on remplace la variable m par 3 :

  $$p(3) = 1{,}5 \times 3 = 4{,}5$$

  L'image de 3 par la fonction p est 4,5.
- **Recherche d'un antécédent :** pour chercher les antécédents de 6, on résout l'équation $p(m) = 6$:

  $$1{,}5\,m = 6 \iff m = \frac{6}{1{,}5} = 4$$

  Le nombre 6 admet un unique antécédent qui est 4.

B) Exemple 3 : Consommation de carburant d'un véhicule

Exemple 3 : Formule et courbe de consommation

Pour une voiture roulant à vitesse stabilisée, la consommation $c(v)$, en litres pour 100 km, en fonction de la vitesse v (en km/h) est donnée sur l'ensemble de définition $\mathcal{D} = [20\,;\,130]$ par la formule :

$$c(v) = \frac{192}{v} + 0{,}7 + 0{,}000\,28\,v^2$$

1. Calcul d'images :

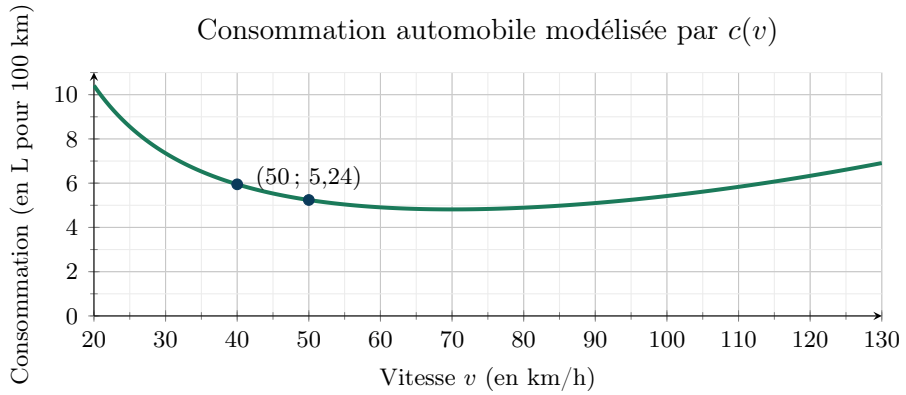
- Pour $v = 40$ km/h :

$$c(40) = \frac{192}{40} + 0{,}7 + 0{,}000\,28 \times 40^2 = 4{,}8 + 0{,}7 + 0{,}448 = 5{,}948$$

- Pour $v = 50$ km/h :

$$c(50) = \frac{192}{50} + 0{,}7 + 0{,}000\,28 \times 50^2 = 3{,}84 + 0{,}7 + 0{,}7 = 5{,}24$$

2. Représentation graphique obtenue à partir de la formule :



C) Lien fondamental entre formule et courbe

Propriété : Appartenance d'un point à la courbe

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Un point $M(x\,;\,y)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si :

$$x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad y = f(x)$$

Test d'appartenance

Pour la fonction de consommation c définie sur $[20\,;\,130]$:

- Le point $A(100\,;\,5{,}42)$ appartient-il à la courbe $\mathcal{C}_c$?

$$c(100) = \frac{192}{100} + 0{,}7 + 0{,}000\,28 \times 100^2 = 1{,}92 + 0{,}7 + 2{,}8 = 5{,}42$$

  L'ordonnée de A est bien égale à $c(100)$, donc $A \in \mathcal{C}_c$.

- Le point $B(50\,;\,6)$ appartient-il à $\mathcal{C}_c$? Comme $c(50) = 5{,}24 \neq 6$, alors $B \notin \mathcal{C}_c$.

Tracer une courbe à partir d'une formule algébrique

Pour tracer point par point la courbe représentative d'une fonction f donnée par une formule sur un intervalle :

1. On choisit des valeurs de la variable x régulièrement espacées sur l'ensemble de définition.
2. On dresse un **tableau de valeurs** en calculant l'image $f(x)$ de chaque valeur retenue.
3. On place les points $M\big(x\,;\,f(x)\big)$ correspondants dans un repère adapté.
4. On relie les points obtenus par une ligne continue et soignée.

Toutes les fonctions n'ont pas de formule

La fonction de croissance (Exemple 2) ne dispose d'aucune expression mathématique simple : elle est définie par un relevé de mesures sur $[0\,;\,50]$. C'est néanmoins une fonction à part entière car à chaque âge correspond une taille unique.

Un peu d'histoire

L'étude des grandeurs en dépendance mutuelle a précédé de plusieurs siècles l'apparition du mot fonction.

- En 1638, Galilée analyse la chute libre des corps et met en évidence que la distance parcourue dépend du carré du temps écoulé.
- À la fin du XVIIe siècle, Gottfried Wilhelm Leibniz utilise le terme latin « functio » pour caractériser les grandeurs géométriques associées aux courbes.
- En 1734, Leonhard Euler introduit la notation universelle $f(x)$.
- En 1837, Peter Gustav Lejeune Dirichlet formule la définition moderne : une correspondance précise qui associe un unique nombre à chaque valeur de la variable, qu'une formule sous-jacente existe ou non.