Seconde 9 — Lycée Yves Leborgne 2026 / 2027

Chapitre III : Vecteurs et géométrie repérée

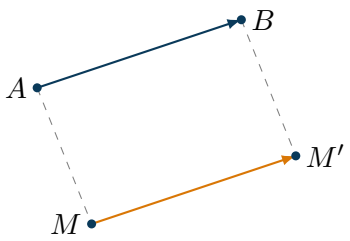
Cours

1) Translations et vecteurs

A) Translation

Définition : Translation

Soient A et B deux points du plan.
La **translation qui transforme A en B** associe à tout point M du plan l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati).
On dit que M' est l'**image** de M par cette translation.



Une translation fait **glisser** toute la figure : chaque point se déplace dans la même direction, dans le même sens et de la même longueur.

B) Vecteur

Définition : Vecteur

À la translation qui transforme A en B, on associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$. Il est caractérisé par :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **longueur**, appelée **norme** et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

On dit aussi que M' est l'image de M par la **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

▶ Voir exercice 1, fiche 1

▶ Voir exercice 2, fiche 1

C) Égalité de deux vecteurs

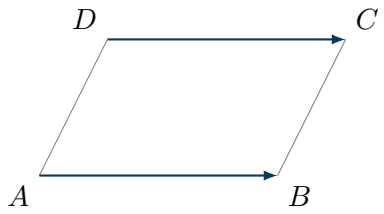
Définition : Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.
Autrement dit, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ lorsque la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.

Propriété : Parallélogramme

Soient A, B, C, D quatre points du plan.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD \text{ est un parallélogramme (éventuellement aplati)}$$



Attention à l'ordre des lettres

Pour écrire l'égalité à partir du nom $ABCD$ du parallélogramme, on garde les deux premières lettres et on inverse les deux dernières : $ABCD$ donne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

▶ Voir exercice 3, fiche 1

D) Représentants, vecteur nul, vecteur opposé

Un vecteur n'a pas de position dans le plan : il peut être dessiné à partir de n'importe quel point. Chaque flèche qui le dessine est un **représentant** de ce vecteur. On note souvent un vecteur par une seule lettre : $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Propriété : Représentant d'origine donnée

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$: c'est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Définition : Vecteur nul

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ correspond à la translation qui ne déplace aucun point. On l'appelle le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.
Pour tout point A : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$, et $\|\vec{0}\| = 0$.

Définition : Vecteur opposé

Le **vecteur opposé** de $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$. Il a la même direction et la même longueur que $\overrightarrow{AB}$, mais le sens contraire.
On note : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

▶ Voir exercice 4, fiche 1

E) Somme de deux vecteurs

Définition : Somme

Enchaîner la translation de vecteur $\vec{u}$ puis la translation de vecteur $\vec{v}$ revient à effectuer une seule translation. Son vecteur est appelé la **somme** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $\vec{u} + \vec{v}$.

Propriété : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

En effet, aller de A à B puis de B à C, c'est aller de A à C.

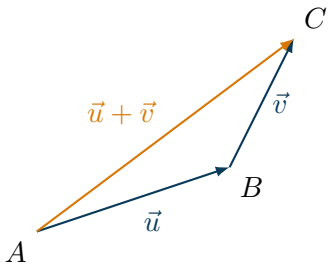
▶ Voir exercice 5, fiche 1

▶ Voir exercice 6, fiche 1

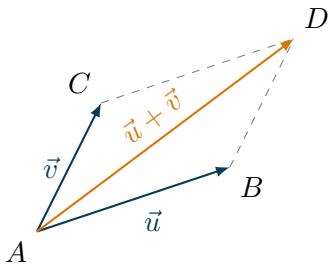
Propriété : Somme d'un vecteur et de son opposé

Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. En particulier, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Deux façons de construire $\vec{u} + \vec{v}$:



Bout à bout (Chasles)



Règle du parallélogramme

Propriété : Règle du parallélogramme

Si $ABDC$ est un parallélogramme, alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

Démonstration : $ABDC$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$ □

Différence de deux vecteurs

Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

▶ Voir exercice 7, fiche 1

▶ Voir exercice 8, fiche 1

2) Vecteurs dans un repère orthonormé

A) Repère orthonormé

Définition : Repère orthonormé

Un repère $(O; I, J)$ du plan est **orthonormé** lorsque :

- les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires ;
- $OI = OJ = 1$.

On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$: on dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une **base orthonormée**, et on note aussi le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

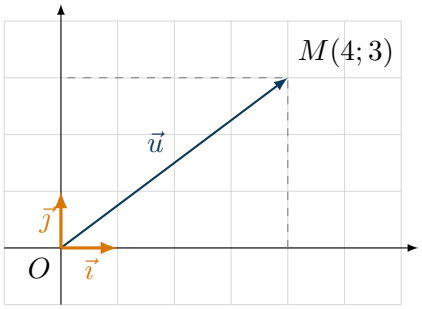
Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

B) Coordonnées d'un vecteur

D'après la partie 1, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit d'une seule façon $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, où M est l'image de l'origine O par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Définition : Coordonnées d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.
Si $M(x; y)$, on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (coordonnées écrites en colonne).



$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Remarque

Ici, nous avons défini les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé. La même définition reste valable dans un repère quelconque.

Propriété : Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

En effet, $\vec{u} = \vec{v}$ signifie que les deux vecteurs ont le même représentant d'origine O, donc la même extrémité M.

▶ Voir exercice 9, fiche 1

▶ Voir exercice 10, fiche 1

C) Translation et coordonnées

Propriété : admise

La translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ transforme le point $P(a;b)$ en le point :

$$P'(a+x;b+y)$$

Autrement dit, x est le déplacement horizontal et y le déplacement vertical. C'est ce qu'on lit sur un quadrillage.

Propriété : Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

Démonstration : notons $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Le point B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc d'après la propriété précédente :

$$x_B = x_A + x \quad \text{et} \quad y_B = y_A + y$$

d'où $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$. □

▶ Voir exercice 11, fiche 1

▶ Voir exercice 12, fiche 1

D) Coordonnées d'une somme et d'un opposé

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Alors :

$$(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (-\vec{u})\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$$

Justification : la translation de vecteur $\vec{u}$ envoie $O(0;0)$ en $M(x;y)$, puis la translation de vecteur $\vec{v}$ envoie M en $N(x+x';y+y')$. L'enchaînement des deux envoie donc O en N, et $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{ON}$.
Pour l'opposé : $-\vec{u}$ ramène $M(x;y)$ en O, donc le déplacement est $-x$ en horizontal et $-y$ en vertical.

▶ Voir exercice 13, fiche 1

▶ Voir exercice 14, fiche 1

E) Norme d'un vecteur et distance entre deux points

Propriété : Norme

Dans un repère **orthonormé**, la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Démonstration : soit $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, et $H(x;0)$. Le triangle OHM est rectangle en H, avec $OH = |x|$ et $HM = |y|$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{u}\|^2 = OM^2 = OH^2 + HM^2 = x^2 + y^2$$ □

Propriété : Distance entre deux points

Dans un repère **orthonormé**, si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$:

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Pourquoi orthonormé ?

La démonstration utilise le théorème de Pythagore : il faut que les axes soient perpendiculaires et que l'unité soit la même sur les deux axes.

▶ Voir exercice 15, fiche 1

▶ Voir exercice 16, fiche 1

F) Milieu d'un segment

Propriété : Caractérisation vectorielle du milieu

Soient A et B deux points et I un point du plan.

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

Propriété : Coordonnées du milieu

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Démonstration : notons $I(x_I;y_I)$. Comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, donc ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées :

$$x_I - x_A = x_B - x_I \iff 2x_I = x_A + x_B \iff x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$$

On procède de même pour l'ordonnée. □

Remarque

Cette formule ne demande pas que le repère soit orthonormé : elle est vraie dans n'importe quel repère.

▶ Voir exercice 17, fiche 1

▶ Voir exercice 18, fiche 1