Correction : Arithmétique fiche 3

Fiche d'exercices – 2nd9

Exercice 1 : Définition de multiple et calcul guidé

1. (a) $91 = 13 \times 7$, donc 91 est un multiple de 7.
   (b) $143 = 11 \times 13$, donc 13 est un diviseur de 143.
   (c) $0 = 0 \times 17$, donc 0 est un multiple de 17.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N = 4n + 12$.
   (a) Pour $n = 2$: $N = 4 \times 2 + 12 = 8 + 12 = 20$.
   Pour $n = 3$: $N = 4 \times 3 + 12 = 12 + 12 = 24$.
   Pour $n = 4$: $N = 4 \times 4 + 12 = 16 + 12 = 28$.
   (b) On a $20 = 4 \times 5$, $24 = 4 \times 6$ et $28 = 4 \times 7$. Dans chacun de ces trois cas, N est bien divisible par 4.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$N = 4n + 12 = 4(n + 3)$$
   Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n + 3 \in \mathbb{N}$. En posant $k = n + 3 \in \mathbb{N}$, on a $N = 4k$, ce qui démontre que N est un multiple de 4 quelle que soit la valeur de l'entier n.

Exercice 2 : Problème : Le cadenas à code secret

Notons N le nombre à trois chiffres, qui s'écrit sous la forme cdu où c est le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités.

- **Indice 1 :** Les nombres premiers sont 2, 3, 5, 7...Le plus petit nombre premier impair est 3. Le chiffre des centaines est donc $c = 3$.
- **Indice 3 :** N est strictement supérieur à 370. Comme $c = 3$, le chiffre des dizaines d est supérieur ou égal à 7 ($d \in \{7\,;\,8\,;\,9\}$).
- **Indice 2 :** N est un nombre pair, donc son chiffre des unités u appartient à $\{0\,;\,2\,;\,4\,;\,6\,;\,8\}$.
- **Indice 3 (suite) :** N est un multiple de 9, donc la somme de ses chiffres $3 + d + u$ doit être un multiple de 9.
- **Indice 4 :** Le chiffre des dizaines est strictement supérieur à celui des unités ($d > u$).

Testons les valeurs possibles pour d :

- Si $d = 7$: la somme des chiffres est $3 + 7 + u = 10 + u$. Pour obtenir un multiple de 9 avec $u \in \{0\,;\,2\,;\,4\,;\,6\,;\,8\}$, il faut $10 + u = 18$, soit $u = 8$. Mais alors $u > d$ ($8 > 7$), ce qui contredit l'indice 4.
- Si $d = 8$: la somme des chiffres est $3 + 8 + u = 11 + u$. Aucun chiffre pair u ne permet d'obtenir un multiple de 9 (il faudrait $u = 7$, or u doit être pair).
- Si $d = 9$: la somme des chiffres est $3 + 9 + u = 12 + u$. Pour obtenir un multiple de 9, il faut $12 + u = 18$, soit $u = 6$. Le chiffre 6 est bien pair, et on a bien $d > u$ ($9 > 6$).

L'unique solution est donc $N = 396$.

Exercice 3 : Démonstration au programme : Somme de deux multiples

1. (a) Comme n et p sont des multiples de 3, il existe deux entiers naturels k et k' tels que $n = 3k$ et $p = 3k'$.

(b) On a alors :

$$n + p = 3k + 3k'$$

(c) En factorisant par 3 :

$$n + p = 3(k + k')$$

Comme $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$, la somme $K = k + k'$ est un entier naturel. On a donc $n + p = 3K$ avec $K \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que $n + p$ est un multiple de 3.

2. Soient a et b deux multiples de 5. Par définition, il existe deux entiers naturels k et k' tels que $a = 5k$ et $b = 5k'$.
Leur somme s'écrit :

$$a + b = 5k + 5k' = 5(k + k')$$

Comme $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$, la somme $k + k'$ est un entier naturel. En posant $K = k + k' \in \mathbb{N}$, on a $a + b = 5K$, ce qui démontre que la somme de deux multiples de 5 est toujours un multiple de 5.

Exercice 4 : Forme algébrique et étude de parité

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - Pour $A = 2n + 6$:
     On factorise par 2 :

     $$A = 2(n + 3)$$

     Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n + 3 \in \mathbb{N}$. En posant $k = n + 3 \in \mathbb{N}$, on obtient $A = 2k$, ce qui prouve que A est un nombre pair.
   - Pour $B = 4n + 7$:
     On écrit $7 = 6 + 1$, d'où :

     $$B = 4n + 6 + 1 = 2(2n + 3) + 1$$

     Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $2n + 3 \in \mathbb{N}$. En posant $k' = 2n + 3 \in \mathbb{N}$, on obtient $B = 2k' + 1$, ce qui prouve que B est un nombre impair.
2. Soit a un nombre entier impair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k + 1$.
Calculons son carré :

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Comme $k \in \mathbb{N}$, le nombre $K = 2k^2 + 2k$ appartient à $\mathbb{N}$. Ainsi $a^2 = 2K + 1$ avec $K \in \mathbb{N}$, ce qui démontre que le carré d'un nombre impair est impair.
3. Soit b un nombre entier pair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b = 2k$.
Calculons son carré :

$$b^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$$

Comme $k \in \mathbb{N}$, le nombre $K' = 2k^2$ appartient à $\mathbb{N}$. Ainsi $b^2 = 2K'$ avec $K' \in \mathbb{N}$, ce qui démontre que le carré d'un nombre pair est pair.

Exercice 5 : Problème : Disposition d'une salle de conférence

1. Chaque rangée contient exactement le même nombre de chaises. Le nombre total de chaises (72) est donc égal au produit du nombre de rangées par le nombre de chaises par rangée. Par conséquent, le nombre de chaises par rangée doit diviser 72 sans reste : c'est un diviseur de 72.
2. Les diviseurs de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Ceux qui sont strictement compris entre 5 et 15 sont : 6, 8, 9 et 12.

3. Calcul du nombre de rangées (Nombre de rangées $= \dfrac{72}{\text{chaises par rangée}}$) :
   - Pour 6 chaises par rangée : $72/6 = 12$ rangées (nombre pair).
   - Pour 8 chaises par rangée : $72/8 = 9$ rangées (nombre impair).
   - Pour 9 chaises par rangée : $72/9 = 8$ rangées (nombre pair).
   - Pour 12 chaises par rangée : $72/12 = 6$ rangées (nombre pair).
4. La contrainte exige que le nombre total de rangées soit un nombre impair. L'unique disposition possible est donc de former 9 rangées de 8 chaises.

Exercice 6 : Nombres premiers et fractions irréductibles

1. Les nombres premiers strictement inférieurs à 30 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.
2. Décomposition en produit de facteurs premiers :
   - $48 = 16 \times 3 = 2^4 \times 3$
   - $84 = 4 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$
   - $180 = 18 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
   - $252 = 4 \times 63 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
   - $504 = 2 \times 252 = 2^3 \times 3^2 \times 7$
   - $1\,386 = 2 \times 693 = 2 \times 9 \times 77 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$
   - $2\,026 = 2 \times 1\,013$ ($1\,013$ est premier)
   - $2\,310 = 10 \times 231 = 2 \times 5 \times 3 \times 77 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$
3. Simplification sous forme irréductible :
   (a) $F_1 = \dfrac{48}{84} = \dfrac{2^4 \times 3}{2^2 \times 3 \times 7} = \dfrac{2^2}{7} = \dfrac{4}{7}$
   (b) $F_2 = \dfrac{84}{180} = \dfrac{2^2 \times 3 \times 7}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \dfrac{7}{3 \times 5} = \dfrac{7}{15}$
   (c) $F_3 = \dfrac{180}{252} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3^2 \times 7} = \dfrac{5}{7}$
   (d) $F_4 = \dfrac{252}{504} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 7} = \dfrac{1}{2}$
   (e) $F_5 = \dfrac{504}{1\,386} = \dfrac{2^3 \times 3^2 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7 \times 11} = \dfrac{2^2}{11} = \dfrac{4}{11}$
   (f) $F_6 = \dfrac{1\,386}{2\,310} = \dfrac{2 \times 3^2 \times 7 \times 11}{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11} = \dfrac{3}{5}$

Exercice 7 : Problème : Gestion d'un stock de t-shirts

1. N est divisible par 5, donc son chiffre des unités est 0 ou 5. De plus, N est un nombre pair, donc son chiffre des unités est pair. On en déduit que le chiffre des unités de N est nécessairement 0.
2. Les multiples de 7 strictement compris entre 150 et 250 sont : Comme $150/7 \approx 21{,}4$ et $250/7 \approx 35{,}7$, on calcule $7 \times k$ pour k allant de 22 à 35 :

   154, 161, 168, 175, 182, 189, 196, 203, 210, 217, 224, 231, 238, 245

3. N doit être un multiple de 7 dont le chiffre des unités est 0. Dans la liste précédente, le seul nombre se terminant par 0 est 210. Le carton contient donc exactement $N = 210$ t-shirts.