Chapitre I : Arithmétique dans $\mathbb{N}$, fiche d'exercices

Exercice 1 : Définition de multiple et calcul guidé

1.) Justifier par une égalité de la forme $a = k \times b$ (avec $k \in \mathbb{N}$) que :

- **a)** 91 est un multiple de 7 ;
- **b)** 13 est un diviseur de 143 ;
- **c)** 0 est un multiple de 17.

2.) Soit n un entier naturel. On pose $N = 4n + 12$.

- **a)** Calculer la valeur de N pour $n = 2$, puis pour $n = 3$ et $n = 4$.
- **b)** Vérifier que dans chacun de ces trois cas, le nombre N obtenu est bien divisible par 4.
- **c)** **Généralisation :** En factorisant l'expression $4n + 12$ par 4, démontrer que le nombre N est un multiple de 4 quelle que soit la valeur de l'entier n.

Exercice 2 : Problème : Le cadenas à code secret

Un coffre est verrouillé par un code mystère composé d'un nombre entier N à trois chiffres. On dispose des indices suivants pour retrouver ce code :

- **Indice 1 :** Le chiffre des centaines est le plus petit nombre premier impair.
- **Indice 2 :** N est un nombre pair.
- **Indice 3 :** N est un multiple de 9 strictement supérieur à 370.
- **Indice 4 :** Le chiffre des dizaines est strictement supérieur à celui des unités.

En justifiant pas à pas à l'aide des définitions du cours, déterminer le code secret N.

Exercice 3 : Démonstration au programme : Somme de deux multiples

1.) **Démonstration au programme :** Soient n et p deux multiples de 3.

- **a)** Écrire n et p sous la forme $3k$ et $3k'$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$.
- **b)** Exprimer la somme $n + p$ en fonction de k et k'.
- **c)** Factoriser par 3 et conclure que $n + p$ est un multiple de 3.

2.) En adaptant la méthode précédente, démontrer que la somme de deux multiples de 5 est toujours un multiple de 5.

Exercice 4 : Forme algébrique et étude de parité

1.) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la parité des nombres suivants en justifiant par une factorisation adaptée :

$$A = 2n + 6 \qquad \text{et} \qquad B = 4n + 7$$

2.) **Démonstration au programme :** Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

3.) Démontrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair.

Exercice 5 : Problème : Disposition d'une salle de conférence

Pour une conférence, un lycée dispose de 72 chaises identiques qu'il souhaite disposer en rangées régulières (chaque rangée comporte exactement le même nombre de chaises).
Pour des raisons d'organisation et de sécurité :

- Chaque rangée doit contenir strictement plus de 5 chaises et strictement moins de 15 chaises ;
- Le nombre total de rangées doit être un nombre **impair**.

1.) Justifier pourquoi le nombre de chaises par rangée doit être un diviseur de 72.

2.) Lister tous les diviseurs de 72 compris entre 5 et 15.

3.) Pour chacun de ces diviseurs, calculer le nombre de rangées nécessaires et préciser sa parité.

4.) En déduire l'unique disposition possible qui respecte l'ensemble des contraintes du lycée.

Exercice 6 : Nombres premiers et fractions irréductibles

1.) Dresser la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 30.

2.) Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers (méthode au choix : calcul mental, divisions ou calculatrice) :

a) 48 **c)** 180 **e)** 504 **g)** 2 026

b) 84 **d)** 252 **f)** 1 386 **h)** 2 310

3.) À l'aide de ces décompositions, rendre les fractions suivantes irréductibles :

a) $F_1 = \dfrac{48}{84}$ **c)** $F_3 = \dfrac{180}{252}$ **e)** $F_5 = \dfrac{504}{1\,386}$

b) $F_2 = \dfrac{84}{180}$ **d)** $F_4 = \dfrac{252}{504}$ **f)** $F_6 = \dfrac{1\,386}{2\,310}$

Exercice 7 : Problème : Gestion d'un stock de t-shirts

Pour la fête du lycée, le club de mathématiques commande un carton contenant des t-shirts floqués. Le responsable n'a plus la facture exacte, mais il dispose des informations suivantes sur l'effectif total N :

- Le nombre de t-shirts N est strictement compris entre 150 et 250 ;
- Si on les range par paquets de 5, il n'en reste aucun ;
- Le nombre N est un nombre pair ;
- Si on les regroupe par sachets de 7, tous les sachets sont complets (aucun t-shirt restant).

1.) Que peut-on déduire pour le chiffre des unités de N d'après la deuxième et la troisième conditions ?

2.) Écrire la liste des multiples de 7 compris entre 150 et 250.

3.) En déduire le nombre exact N de t-shirts contenus dans le carton.