2) Valeur absolue et notion de distance

A) Définition géométrique et algébrique

Définition : Valeur absolue d'un nombre réel

Sur une droite graduée munie d'une origine O et d'une unité de longueur, soit M le point d'abscisse un nombre réel x.
On appelle **valeur absolue** du réel x, notée $|x|$, la **distance entre l'origine O et le point M** :

$$|x| = OM$$

De manière algébrique, cette grandeur s'exprime selon le signe de x :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Propriétés fondamentales

Une distance étant une grandeur toujours positive ou nulle, pour tout réel x, on a $|x| \geq 0$.
L'égalité $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.
Deux nombres opposés ont exactement la même distance par rapport à l'origine, ainsi pour tout réel x, on a $|-x| = |x|$.

Calculs directs

Pour les entiers et les décimaux, on a immédiatement $|5| = 5$, $|-7{,}2| = 7{,}2$ et $|0| = 0$.
Pour des expressions comportant des racines ou des constantes, on étudie d'abord le signe de la quantité. Comme $\pi \approx 3{,}14$, la différence $\pi - 4$ est strictement négative, ce qui conduit à :

$$|\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi$$

L'apparition des barres verticales

C'est le mathématicien allemand Karl Weierstrass qui introduit en 1841 la notation moderne des deux barres verticales $|x|$ pour désigner la valeur absolue d'un nombre, formalisant l'idée d'une grandeur dépouillée de son signe positif ou négatif.

B) Distance entre deux nombres réels

Définition : Distance sur la droite numérique

Soient a et b deux nombres réels représentés respectivement par les points A et B d'une droite graduée.
La **distance** entre les réels a et b est égale à la longueur du segment $[AB]$:

$$d(a,b) = AB = |b-a| = |a-b|$$

Applications numériques

La distance entre les nombres 7 et 3 est égale à :

$$d(7\ ;\ 3) = |7-3| = |4| = 4$$

La distance entre les nombres -5 et 2 s'écrit :

$$d(-5\ ;\ 2) = |2-(-5)| = |2+5| = |7| = 7$$

La distance entre les nombres -1 et -6 est donnée par :

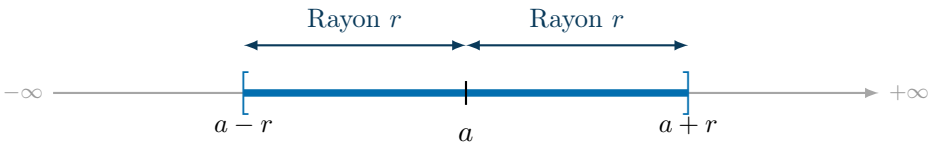
$$d(-1\ ;\ -6) = |-1-(-6)| = |-1+6| = |5| = 5$$

C) Inéquations du type $|x-a| \leq r$ et intervalles

Propriété : Caractérisation d'un intervalle par son centre et son rayon

Soient a un réel quelconque et r un réel positif ou nul ($r \geq 0$).
L'inégalité $|x-a| \leq r$ exprime géométriquement que la distance entre le nombre x et le centre a est inférieure ou égale à r.
L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle fermé centré en a et de rayon r :

$$|x-a| \leq r \iff a-r \leq x \leq a+r \iff x \in [a-r\ ;\ a+r]$$



Cas des inégalités strictes

La propriété s'adapte immédiatement aux inégalités strictes en ouvrant les bornes de l'intervalle :

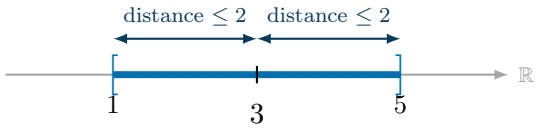
$$|x-a| < r \iff x \in]a-r\ ;\ a+r[$$

Méthode de résolution pas à pas

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-3| \leq 2$, on traduit l'expression en termes de distance sur la droite numérique.
Le terme $|x-3|$ représente la distance entre le nombre x et le centre 3. L'inéquation impose que cette distance soit inférieure ou égale au rayon $r = 2$.

On détermine les deux extrémités du segment :

$$3-2=1 \qquad \text{et} \qquad 3+2=5$$



L'ensemble des solutions est donc l'intervalle fermé :

$$S=[1\ ;\ 5]$$

Traduction inverse : d'un intervalle vers une inéquation

Soit l'intervalle $I=[-1\ ;\ 7]$. Pour caractériser l'appartenance à cet intervalle à l'aide d'une valeur absolue, on détermine d'abord l'abscisse du centre c du segment :

$$c=\frac{-1+7}{2}=3$$

On calcule ensuite le rayon r correspondant à la demi-longueur de l'intervalle :

$$r=\frac{7-(-1)}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Ainsi, pour tout nombre réel x, la relation se traduit par l'équivalence :

$$x\in[-1\ ;\ 7] \iff |x-3|\leq 4$$