Chapitre I : Nombres, intervalles et arithmétique

1) Ensembles de nombres

A) Définition des différents ensembles

Définition : L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

L'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est constitué des nombres qui servent à **dénombrer** (compter des unités séparées) :

$$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\dots\}$$

Opérations dans $\mathbb{N}$ et limites

- L'addition et la multiplication sont **commutatives** ($a+b=b+a$) et **associatives** ($(a+b)+c=a+(b+c)$). La multiplication est prioritaire sur l'addition.
- Certaines soustractions sont possibles comme $10-7=3$, mais des calculs comme $7-10$ sont **impossibles dans $\mathbb{N}$**. Cela motive l'introduction des entiers négatifs.

L'origine de $\mathbb{N}$ et le mot « calcul »

Le mot **calcul** vient du latin *calculus*, qui désigne un petit caillou. Les bergers de l'Antiquité utilisaient des cailloux pour compter leurs bêtes. La lettre **N** désigne tout simplement le mot **Naturel**.

Définition : L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

L'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est formé par les **entiers naturels et leurs opposés** :

$$\mathbb{Z} = \{\dots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\dots\}$$

La soustraction comme addition d'un opposé

Dans $\mathbb{Z}$, **toutes** les soustractions deviennent réalisables. Soustraire un terme revient à **ajouter son opposé** :

$$7-3=7+(-3)=4 \qquad \text{et} \qquad 7-10=7+(-10)=-3$$

Ainsi, la soustraction hérite des propriétés de l'addition (commutativité des termes signés).

D'où vient la lettre $\mathbb{Z}$?

La lettre **Z** vient du mot allemand ***Zahlen*** (« nombres »). Introduite par le collectif français *Nicolas Bourbaki* au XXe siècle, elle a mis fin à des siècles de réticence en Occident où les nombres négatifs étaient qualifiés d'« absurdes » ou de « faux ».

Définition : L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

Pour mesurer des grandeurs physiques (longueurs avec le **mètre**, capacités avec le **litre**, masses avec le **gramme**), le système métrique s'est structuré autour de la base 10 :

- en **groupements de dix** : décamètre, hectomètre, kilogramme (10, 100, 1 000 fois l'unité) ;
- en **divisions par dix** : décimètre, centilitre, milligramme ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$ de l'unité).

Ces subdivisions mènent à l'écriture décimale à virgule. Un nombre est dit **décimal** s'il possède un nombre **fini** de chiffres après la virgule, c'est-à-dire s'il s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{10^n} \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

L'essor du système décimal

La lettre **D** vient du latin *decimus* (le dixième). C'est le mathématicien flamand Simon Stevin qui publie en 1585 *La Disme*, promouvant l'écriture décimale pour simplifier le calcul des mesures et du commerce.

Définition : L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Subdiviser l'unité en puissances de 10 ne suffit pas : on doit aussi pouvoir partager une unité en 3, 7 ou 11 parts rigoureusement égales.
Un nombre est **rationnel** s'il s'écrit sous la forme d'un quotient d'entiers (une fraction) :

$$\frac{p}{q} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \quad (q \neq 0)$$

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Écriture décimale d'un rationnel

L'écriture décimale d'un nombre rationnel est :

- soit **finie** (le rationnel est alors aussi un nombre décimal, ex. : $\frac{3}{4} = 0{,}75$),
- soit **infinie et périodique** (un cycle de chiffres se répète indéfiniment, ex. : $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$).

Démonstration (au programme) : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

Démontrons par l'**absurde** que $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$:

- Supposons que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal. Il existe alors deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \iff 3 \times a = 10^n$$

- Cette égalité signifie que 10^n est un **multiple de 3**.
- Or, l'écriture décimale de 10^n est 1 suivi de n zéros $(10\ldots0)$. La somme de ses chiffres vaut toujours 1, qui n'est pas divisible par 3. Donc 10^n n'est jamais divisible par 3.
- C'est une contradiction ! L'hypothèse de départ est fausse, donc $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Pourquoi la lettre $\mathbb{Q}$?

La lettre **Q** a été introduite au XIXe siècle par l'Italien Giuseppe Peano. Elle vient de ***Quoziente*** (« quotient »), rappelant qu'un rationnel est le rapport exact de deux entiers.

Définition : L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Certains nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction d'entiers : leur écriture décimale est infinie **sans période régulière** (ex. : $\sqrt{2}$, π ou $0{,}1234567891011\ldots$). Ce sont les nombres **irrationnels**.
L'ensemble des **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$, regroupe **tous les nombres connus et manipulés en Seconde**. Il est constitué de la réunion des **rationnels** et des **irrationnels**.

La découverte des irrationnels

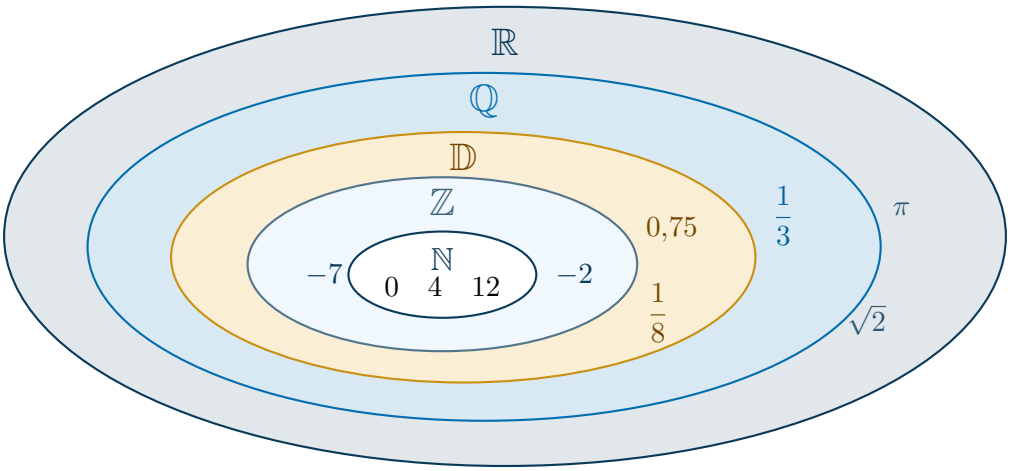
Les pythagoriciens démontrèrent que la diagonale d'un carré de côté 1 ($\sqrt{2}$) ne peut pas s'écrire sous forme de fraction. Ce choc remit en cause leur vision du monde : ils appelèrent ces grandeurs *incommensurables*, devenues nos nombres **irrationnels** (du latin *ratio* : « rapport » et « raison »).

B) Emboîtement et nature d'un nombre

Propriété : Chaîne d'inclusions

Chaque ensemble est entièrement contenu dans le suivant :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Ne pas confondre Appartenance $\in$ et Inclusion $\subset$

— Le symbole $\in$ (« appartient à ») relie un **élément** (un nombre) à un **ensemble**.
Exemples : $-3 \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

— Le symbole $\subset$ (« est inclus dans ») relie un **ensemble** à un autre **ensemble**.
Exemples : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ (car $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$).

Définition : Nature d'un nombre

On appelle **nature d'un nombre** le **plus petit ensemble** (au sens de l'inclusion) auquel ce nombre appartient.

Déterminer la nature d'un nombre

Un nombre peut appartenir à plusieurs ensembles en même temps, mais il n'a qu'une seule nature :

— Le nombre 5 appartient à $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Sa nature est : **entier naturel ($\mathbb{N}$)**.

— Le nombre $-\dfrac{12}{3} = -4$ appartient à $\mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Sa nature est : **entier relatif ($\mathbb{Z}$)**.

— Le nombre $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$ appartient à $\mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Sa nature est : **décimal ($\mathbb{D}$)**.

— Le nombre $\dfrac{1}{3}$ appartient à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Sa nature est : **rationnel ($\mathbb{Q}$)**.

— Le nombre $\sqrt{2}$ n'appartient qu'à $\mathbb{R}$. Sa nature est : **réel ($\mathbb{R}$)**, plus précisément **irrationnel**.

2) Droite des réels et intervalles de $\mathbb{R}$

A) Droite numérique et notion d'intervalle

Définition : Droite des réels et intervalle

À tout point d'une droite graduée (munie d'une origine O et d'une unité de longueur) correspond un unique nombre réel appelé son **abscisse**, et réciproquement. Cette droite s'appelle la **droite des réels** (notée $\mathbb{R}$).
On appelle **intervalle de $\mathbb{R}$** tout sous-ensemble de nombres réels correspondant à un **segment** ou à une **demi-droite** de la droite des réels.

Sens des crochets et infinis

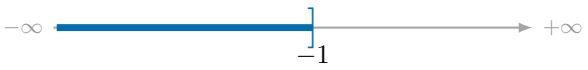
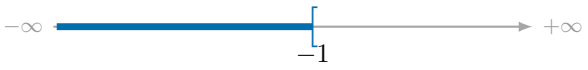
— Les symboles $-\infty$ (« moins l'infini ») et $+\infty$ (« plus l'infini ») **ne sont pas des nombres**. Du côté de $-\infty$ ou $+\infty$, le crochet est **toujours ouvert** (tourné vers l'extérieur).

— **Crochet fermé** [ou] : la borne **appartient** à l'intervalle (inégalité large $\leq$ ou $\geq$).

— **Crochet ouvert**] ou [: la borne **n'appartient pas** à l'intervalle (inégalité stricte $<$ ou $>$).

B) Tableau récapitulatif des intervalles (Exemples)

Inégalité pour x	Notation de l'intervalle	Représentation sur la droite graduée
1. Intervalles bornés (Segments)		
$-2 \leq x \leq 3$	$x \in [-2\ ;\ 3]$	
$-2 < x < 3$	$x \in \left]-2\ ;\ 3\right[$	
$-2 \leq x < 3$	$x \in [-2\ ;\ 3[$	
$-2 < x \leq 3$	$x \in \left]-2\ ;\ 3\right]$	

Inégalité pour x	Notation de l'intervalle	Représentation sur la droite graduée
2. Intervalles non bornés (Demi-droites et droite entière)		
$x \geq 1$	$x \in [1\ ;\ +\infty[$	
$x > 1$	$x \in]1\ ;\ +\infty[$	
$x \leq -1$	$x \in]-\infty\ ;\ -1]$	
$x < -1$	$x \in]-\infty\ ;\ -1[$	
$x \in \mathbb{R}$	$x \in]-\infty\ ;\ +\infty[$	