Chapitre I : Probabilités

Partie 2 : Dénombrement

2) Dénombrement

A) Cardinal et principe additif

Définition : Cardinal d'un ensemble fini

Un ensemble E est dit **fini** lorsqu'il possède un nombre fini d'éléments.
Ce nombre total d'éléments distincts est appelé le **cardinal** de E, noté $\mathbf{Card}(E)$ (ou $\#E$).
Par convention, pour l'ensemble vide : $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Propriété : Formule de l'union (Rappel de Seconde)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Propriété : Principe additif et partitions

Si deux ensembles finis A et B sont **disjoints** ($A \cap B = \emptyset$), alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Plus généralement, si des sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_p$ forment une **partition** d'un ensemble fini E (ils sont deux à deux disjoints et leur réunion forme E), alors :

$$\text{Card}(E) = \sum_{i=1}^{p} \text{Card}(A_i) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \cdots + \text{Card}(A_p)$$

Exemple

Dans un groupe de 35 élèves de Terminale, 20 font la spécialité SES, 15 font la spécialité LLCE et 6 font les deux spécialités.

— Nombre d'élèves faisant au moins l'une des deux spécialités :

$$\text{Card}(S \cup L) = \text{Card}(S) + \text{Card}(L) - \text{Card}(S \cap L) = 20 + 15 - 6 = 29$$

— Nombre d'élèves ne faisant aucune de ces deux spécialités :

$$\text{Card}(E) - \text{Card}(S \cup L) = 35 - 29 = 6$$

B) Produit cartésien et k-listes avec répétition

Définition : Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble constitué de tous les couples $(x\,;y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.
Plus généralement, pour k ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_k$, le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ est l'ensemble des k-uplets (ou k-listes) $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tels que chaque $x_i \in E_i$.

Propriété : Principe multiplicatif

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_k$ des ensembles finis. Le cardinal de leur produit cartésien est égal au produit de leurs cardinaux :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \cdots \times \text{Card}(E_k)$$

Propriété : Dénombrement des k-listes avec répétition

Soit E un ensemble fini à n éléments ($\text{Card}(E) = n$).
Le nombre de k-uplets (ou k-listes) d'éléments de E (avec ordre et répétition possible) est :

$$\text{Card}(E^k) = n^k$$

Méthode des cases : k-listes avec répétition

On souhaite créer un mot de passe de 4 lettres en utilisant exclusivement les lettres de l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ (soit 5 lettres au choix). Les répétitions sont autorisées (ex : $AABA$).
Pour construire ce code, on remplit 4 cases consécutives :

$$\underset{1^{\text{re}}\text{ lettre}}{\boxed{5}} \times \underset{2^{\text{e}}\text{ lettre}}{\boxed{5}} \times \underset{3^{\text{e}}\text{ lettre}}{\boxed{5}} \times \underset{4^{\text{e}}\text{ lettre}}{\boxed{5}} = 5^4 = 625 \text{ mots de passe possibles.}$$

C) Permutations et factorielle

Définition : Factorielle d'un entier

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on appelle **factorielle** n, notée $n!$, le produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Par convention, pour $n = 0$: $0! = 1$.

Définition : Permutation

Soit E un ensemble fini à n éléments. Une **permutation** de E est une liste ordonnée contenant tous les éléments de E, chacun apparaissant exactement une seule fois.

Propriété : Nombre de permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments est :

$$n!$$

Méthode des cases : Permutations

De combien de manières différentes 5 élèves peuvent-ils s'asseoir sur un banc de 5 places ?
On remplit les 5 places (cases) successivement sans répétition :

$$\underset{\text{Place 1}}{\boxed{5}} \times \underset{\text{Place 2}}{\boxed{4}} \times \underset{\text{Place 3}}{\boxed{3}} \times \underset{\text{Place 4}}{\boxed{2}} \times \underset{\text{Place 5}}{\boxed{1}} = 5! = 120 \text{ dispositions.}$$

D) Arrangements (k-listes sans répétition)

Définition : Arrangement

Soit E un ensemble fini à n éléments et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.
Un **arrangement** de k éléments de E est un k-uplet (liste ordonnée) d'éléments **distincts** de E.

Propriété : Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de k éléments choisis parmi n, noté A_n^k, est donné par :

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Méthode des cases : Arrangements

Dans un club de 10 membres, on doit élire un bureau composé d'un Président, d'un Trésorier et d'un Secrétaire (aucun cumul de mandat).
L'ordre des postes compte et il n'y a pas de répétition : on remplit 3 cases parmi les 10 candidats :

$$\underset{\text{Président}}{\boxed{10}} \times \underset{\text{Trésorier}}{\boxed{9}} \times \underset{\text{Secrétaire}}{\boxed{8}} = 720 \text{ bureaux possibles.}$$

Par la formule : $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

E) Combinaisons

Définition : Combinaison

Soit E un ensemble fini à n éléments et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
Une **combinaison** de k éléments de E est une **partie** (un sous-ensemble) à k éléments de E.
Dans une combinaison, l'ordre des éléments ne compte pas.

Propriété : Nombre de combinaisons et coefficient binomial

Le nombre de combinaisons de k éléments choisis parmi n est noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n »).
Comme chaque groupe non ordonné de k éléments génère $k!$ arrangements ordonnés, on élimine la répétition liée à l'ordre en divisant par $k!$:

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Méthode des cases : Anagrammes et Combinaisons

Combien d'anagrammes (mots de 6 lettres ayant ou non un sens) peut-on former avec les lettres du mot **ANANAS** ?
Le gabarit comporte 6 cases : _ _ _ _ _ _.

1. On choisit d'abord **3 cases parmi 6** pour placer les trois « A » :

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ choix.}$$

2. Il reste 3 cases libres. On choisit **2 cases parmi ces 3** pour placer les deux « N » :

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3 \text{ choix.}$$

3. Il reste **1 case** pour placer la dernière lettre « S » : $\binom{1}{1} = 1$ choix.

Par le principe multiplicatif, le nombre total d'anagrammes est :

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 20 \times 3 \times 1 = 60 \text{ mots distincts.}$$

F) Triangle de Pascal et Formule du Binôme de Newton

Propriété : Propriétés immédiates des coefficients binomiaux

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Symétrie : Pour tout $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Théorème : Relation de Pascal

Pour tous entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n-1$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Interprétation de la relation de Pascal

Pour choisir k éléments parmi n avec un élément particulier fixé X :

- Soit X est sélectionné : il reste à choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ restants ($\binom{n-1}{k-1}$ choix).
- Soit X n'est pas sélectionné : il faut choisir les k éléments parmi les $n-1$ restants ($\binom{n-1}{k}$ choix).

Ces deux situations étant disjointes, leur somme donne le nombre total $\binom{n}{k}$.

Propriété : Triangle de Pascal jusqu'à $n = 7$

La relation de Pascal permet de calculer de proche en proche les coefficients : chaque terme s'obtient en additionnant le nombre situé juste au-dessus et celui situé juste au-dessus à gauche.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n = 0$	**1**							
$n = 1$	**1**	**1**						
$n = 2$	**1**	**2**	**1**					
$n = 3$	**1**	**3**	**3**	**1**				
$n = 4$	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**			
$n = 5$	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**		
$n = 6$	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	
$n = 7$	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**

Théorème : Formule du Binôme de Newton

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Lien direct avec le triangle de Pascal (extensions des identités remarquables) :

- Pour $n = 1$: $(a+b)^1 = \mathbf{1}a + \mathbf{1}b$
- Pour $n = 2$: $(a+b)^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$ (identité remarquable de Seconde)
- Pour $n = 3$: $(a+b)^3 = \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$
- Pour $n = 4$: $(a+b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4$

Application algébrique

Pour tous réels $p \in [0;1]$ et $1-p$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1^n = 1$$

G) Nombre de parties d'un ensemble ($\mathcal{P}(E)$ et 2^n)

Théorème : Nombre total de parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini à n éléments ($\text{Card}(E) = n$).
Le nombre de sous-ensembles (ou parties) de E est :

$$\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$$

Démonstration (par la méthode des cases) :

Numérotons les n éléments de l'ensemble E : $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Former une partie A de E revient à décider, pour chaque élément x_i, s'il appartient ou non à A :

- Soit $x_i \in A$ (on note 1) ;
- Soit $x_i \notin A$ (on note 0).

Chaque partie correspond donc de façon unique à une liste de n choix binaires :

$$\underset{\text{Élément } x_1}{\boxed{2}} \times \underset{\text{Élément } x_2}{\boxed{2}} \times \underset{\ldots}{\boxed{\ldots}} \times \underset{\text{Élément } x_n}{\boxed{2}} = 2^n \text{ parties possibles.}$$

□

Propriété : Identité de la somme des coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Démonstration :

Une partie de E peut contenir soit 0 élément, soit 1 élément, …, soit n éléments. Ces éventualités forment une partition de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$. Par le principe additif :

$$\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = \sum_{k=0}^{n} (\text{nombre de parties à } k \text{ éléments}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Comme on a démontré que $\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$, on obtient directement :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

□