Chapitre I : Probabilités

Fiche d'exercices 2 : Variables aléatoires

Exercice 1 : Comparaison de deux stratégies à la roulette

À la roulette européenne, le cylindre comporte 37 cases numérotées de 0 à 36 :

— 18 cases rouges ;

— 18 cases noires ;

— 1 case verte portant le numéro 0.

La bille a la même probabilité de s'arrêter sur chacune des 37 cases.



Pour participer, le joueur doit d'abord engager une mise de 10 €, qui est définitivement conservée par le casino. Il hésite entre deux stratégies :

— **Stratégie A (Pari sur une couleur) :** il parie sur le rouge. Si une case rouge sort, le casino lui verse 2 fois sa mise. Dans tous les autres cas, il ne reçoit rien. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

— **Stratégie B (Pari sur un numéro plein) :** il parie sur le numéro 7. Si le numéro 7 sort, le casino lui verse 36 fois sa mise. Dans tous les autres cas, il ne reçoit rien. On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1) Étude de la stratégie A

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme de tableau.

b) Calculer l'espérance $E(X)$ sous forme de fraction irréductible, puis en donner une valeur approchée au centime d'euro.

c) Calculer la variance $V(X)$, puis en déduire l'écart-type $\sigma(X)$ arrondi au centime.

2) Étude de la stratégie B

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y sous forme de tableau.

b) Calculer l'espérance $E(Y)$ sous forme de fraction irréductible, puis en donner une valeur approchée au centime d'euro.

c) Calculer la variance $V(Y)$, puis en déduire l'écart-type $\sigma(Y)$ arrondi au centime.

3) Bilan

a) Comparer et interpréter les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.

b) Comparer et interpréter les écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 2 : Achat d'un smartphone et accessoires

D'après Sujet E3C N°02603, Spécialité Mathématiques Première

Un magasin de téléphonie mobile lance une offre sur ses smartphones de la marque Pomme vendus à 800 € : il propose une assurance complémentaire pour 50 € ainsi qu'une coque à 20 €.
Ce magasin a fait les constatations suivantes concernant les acheteurs de ce smartphone :

- 40 % des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire ;
- Parmi les acheteurs qui ont souscrit à l'assurance complémentaire, 20 % ont acheté en plus la coque ;
- Parmi les acheteurs qui n'ont pas souscrit à l'assurance complémentaire, deux sur trois n'ont pas acheté la coque.

On interroge au hasard un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.
On considère les événements suivants :

- A : « le client a souscrit à l'assurance complémentaire » ;
- C : « le client a acheté la coque ».

1) Calculer la probabilité que le client ait souscrit à l'assurance complémentaire et ait acheté la coque.

2) Montrer que $P(C) = 0{,}28$.

3) Le client interrogé a acheté la coque. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas souscrit à l'assurance complémentaire ?

4) On note X la variable aléatoire qui représente la dépense totale (en euros) d'un client ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.

a) Déterminer les différentes valeurs prises par X ainsi que la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5) Calculer la variance $V(X)$, puis en déduire l'écart-type $\sigma(X)$ arrondi au centime d'euro.

Exercice 3 : Jeu de dé et tirage dans deux urnes

D'après Sujet E3C N°02643, Spécialité Mathématiques Première

On dispose d'un dé équilibré à six faces et de deux urnes U et V contenant des boules blanches ou rouges, indiscernables au toucher.

- L'urne U contient 40 boules blanches et 60 boules rouges.
- L'urne V contient 70 boules blanches et 30 boules rouges.

Un jeu consiste à lancer le dé puis tirer une boule dans l'une des urnes. Si on obtient 1 ou 6 sur le dé, le tirage s'effectue dans l'urne U. Si on obtient 2, 3, 4 ou 5 sur le dé, le tirage s'effectue dans l'urne V.
On considère les événements :

- U : « le tirage s'effectue dans l'urne U » ;
- V : « le tirage s'effectue dans l'urne V » ;
- B : « la boule tirée est blanche » ;
- R : « la boule tirée est rouge ».

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Déterminer la probabilité de l'événement « la boule tirée est rouge ».

3) On tire une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne U ?

4) Dans cette question, la mise de départ est de 1 €. L'organisateur verse 3 € au joueur s'il tire une boule rouge et ne lui verse rien s'il tire une boule blanche. On note G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G sous forme de tableau.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ou à l'organisateur ?

c) Calculer la variance $V(G)$, puis en déduire l'écart-type $\sigma(G)$ arrondi au centime d'euro.

5) On suppose désormais que les sommes versées par l'organisateur restent inchangées (3 € pour une boule rouge, 0 € pour une boule blanche), mais que la mise de départ est fixée à un montant quelconque $m > 0$ (en euros). On note G_m le nouveau gain algébrique du joueur.

a) Exprimer l'espérance $E(G_m)$ en fonction de m.

b) En déduire la valeur de la mise m pour laquelle le jeu est équitable.

c) Démontrer que la variance $V(G_m)$ et l'écart-type $\sigma(G_m)$ ne dépendent pas de la mise m.

Exercice 4 : Épreuve d'examen et notation de deux questions

D'après Baccalauréat Spécialité, Session 2024

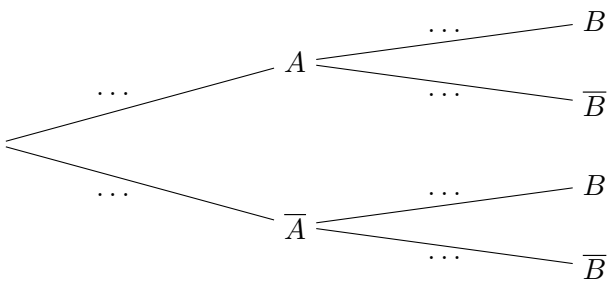
Dans un examen, une épreuve est constituée de deux exercices. On s'intéresse au premier exercice, noté sur deux points et composé de deux questions Q1 et Q2. Chaque question rapporte un point en cas de réponse correcte, et zéro point sinon.
On considère que :

- Un candidat pris au hasard a une probabilité de 0,8 de répondre correctement à la question Q1 ;
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité de 0,6 de répondre correctement à Q2 ;
- S'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité de 0,1 de répondre correctement à Q2.

On choisit un candidat au hasard et on note :

- A : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant la situation :



2) Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions.

3) Démontrer que la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2 est égale à 0,5.

4) On note X le nombre de points obtenus à la question Q1 et Y le nombre de points obtenus à la question Q2.

a) Donner sans justification la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

b) À l'aide de la question **3)**, donner la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

5) On note Z le nombre total de points obtenus par le candidat à cet exercice.

a) Quelles sont les valeurs possibles prises par Z ?

b) Déterminer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 2)$. En déduire $P(Z = 1)$.

c) Dresser le tableau de la loi de probabilité de Z.

d) Calculer l'espérance $E(Z)$ et interpréter ce résultat. A-t-on $E(Z) = E(X) + E(Y)$?

e) Calculer la variance $V(Z)$ puis l'écart-type $\sigma(Z)$ arrondi au centième. A-t-on $V(Z) = V(X) + V(Y)$?