Chapitre II : Rappels,continuité et Théorème des Valeurs Intermédiaires

1) Rappels d'analyse

A) Fonctions affines

Définition : Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax + b \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

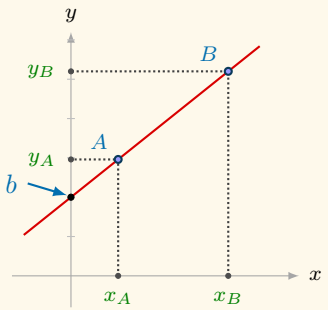
Sa représentation graphique est une droite de coefficient directeur (pente) a et d'ordonnée à l'origine b.

Propriété : Droite représentative et calcul de la pente

Dans un repère du plan, la courbe représentative de la fonction affine f est une **droite** non verticale d'équation réduite $y = ax + b$.

- L'ordonnée à l'origine est b : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;\,b)$.
- Pour deux points distincts $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ de la droite (avec $x_A \neq x_B$), le coefficient directeur a est donné par :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$



Propriété : Dérivée, variations et tableau de signe

Soit $f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout réel x, la dérivée est constante : $f'(x) = a$.
- **Sens de variation :**
  - Si $a > 0$, f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
  - Si $a < 0$, f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.
  - Si $a = 0$, f est **constante** sur $\mathbb{R}$ ($f(x) = b$).
- **Racine et signe ($a \neq 0$) :** l'équation $ax + b = 0$ a pour unique solution $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.
  La fonction est du signe de a **après la racine** (après son annulation) :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$	signe de $-a$		0	signe de a	

B) Fonctions polynômes

Définition : Forme développée et forme canonique d'un trinôme

Soit P une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme développée :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Tout trinôme du second degré admet une écriture sous **forme canonique** :

$$P(x) = a(x - x_0)^2 + P(x_0) \quad \text{avec} \quad x_0 = -\frac{b}{2a}$$

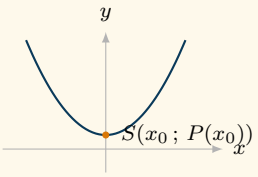
Le point $S(x_0\,;\,P(x_0))$ est le **sommet** de la parabole représentant P.

Propriété : Variations, extremum et allures graphiques du second degré

La parabole admet pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Cas $a > 0$ (parabole tournée vers le haut)

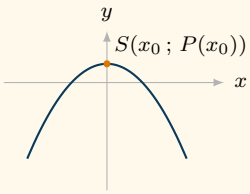
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		$\searrow$	$P(x_0)$	$\nearrow$	



P admet un **minimum** absolu égal à $P(x_0)$, atteint en x_0.

Cas $a < 0$ (parabole tournée vers le bas)

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		$\nearrow$	$P(x_0)$	$\searrow$	



P admet un **maximum** absolu égal à $P(x_0)$, atteint en x_0.

Propriété : Racines du second degré (Équation $P(x) = 0$)

On pose le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta < 0$: l'équation $P(x) = 0$ n'admet **aucune racine réelle**.

— Si $\Delta = 0$: l'équation $P(x) = 0$ admet **une unique racine double** :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta > 0$: l'équation $P(x) = 0$ admet **deux racines réelles distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Propriété : Signe du second degré (Inéquation $P(x) \gtrless 0$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le trinôme $P(x)$ est **toujours du signe de a**, sauf entre ses racines éventuelles lorsqu'elles existent :

— Si $\Delta < 0$: $P(x)$ est du **signe de a** sur tout $\mathbb{R}$.

— Si $\Delta = 0$: $P(x)$ est du **signe de a** sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ et s'annule en x_0.

— Si $\Delta > 0$ (en supposant $x_1 < x_2$) : $P(x)$ est du **signe de $-a$** entre x_1 et x_2, et du **signe de a** à l'extérieur :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $P(x)$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	

Propriété : Généralisation aux polynômes de degré n et factorisation

Une fonction polynôme P de degré n ($n \geq 1$) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

— **Théorème de factorisation par une racine :**

$$\alpha \text{ est une racine de } P \quad (P(\alpha) = 0) \iff P(x) \text{ est factorisable par } (x - \alpha)$$

C'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$$

— **Dérivée d'un polynôme de degré n :** P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée P' est un polynôme de degré $n-1$ donné par :

$$P'(x) = n\, a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

C) Autres fonctions de référence (inverse, cube, racine)

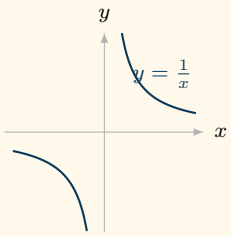
Propriété : Fonction inverse

La fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

— Dérivée : pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

— Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) < 0$, elle est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

— Sa courbe est une hyperbole symétrique par rapport à l'origine O.



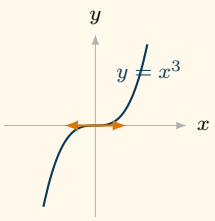
Propriété : Fonction cube

La fonction cube $f(x) = x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

— Dérivée : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

— Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$ et s'annule uniquement en 0 : f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

— Sa courbe admet en l'origine une **tangente horizontale** d'équation $y = 0$.



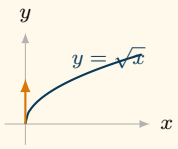
Propriété : Fonction racine carrée

La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $[0\,;+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

— Dérivée : pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

— Pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc la fonction racine est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

— Elle n'est **pas dérivable en 0** : son taux de variation tend vers $+\infty$, d'où une **demi-tangente verticale** en 0.



Non-dérivabilité en 0 pour la racine carrée

Bien que 0 appartienne à l'ensemble de définition de la fonction racine carrée ($f(0) = 0$), le taux de variation $\dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ n'admet pas de limite finie en 0. La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

D) Fonction exponentielle

Propriété : Fonction exponentielle népérienne

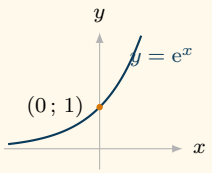
La fonction exponentielle, notée exp ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$. Par conséquent, la fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

— Propriétés algébriques : $\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u \mathrm{e}^v$; $\mathrm{e}^{-u} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^u}$; $\mathrm{e}^{u-v} = \dfrac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^v}$; $(\mathrm{e}^u)^n = \mathrm{e}^{nu}$ $(n \in \mathbb{Z})$.



E) Compléments sur la dérivation

Définition : Nombre dérivé

Soit f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. f est **dérivable en** x_0 si son taux de variation admet une limite finie en 0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Propriété : Équation de la tangente

Si f est dérivable en x_0, la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(x_0\,;\,f(x_0))$ a pour équation réduite :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Propriété : Tableau récapitulatif des dérivées usuelles

Fonction $f(x)$	Ensemble $\mathcal{D}_f$	Dérivée $f'(x)$	Ensemble $\mathcal{D}_{f'}$
Constante : k	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
Affine : $ax+b$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
Puissance : x^n $(n \geq 1)$	$\mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
Inverse : $\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
Racine : $\sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
Exponentielle : e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$

Propriété : Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $k \in \mathbb{R}$.

Opération	Formule de dérivation
Somme : $u+v$	$(u+v)' = u' + v'$
Produit par un scalaire : $k \cdot u$	$(k \cdot u)' = k \cdot u'$
Produit : $u \cdot v$	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
Inverse : $\dfrac{1}{v}$ $\quad (v(x) \neq 0)$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
Quotient : $\dfrac{u}{v}$ $\quad (v(x) \neq 0)$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Propriété : Dérivée d'une fonction composée et cas particuliers

Soit f dérivable sur I et g dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$. La fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f) \quad \text{soit pour tout } x \in I, \quad (g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x))$$

Applications directes avec une fonction u dérivable sur un intervalle I :

Forme composée	Formule de dérivation	Condition sur u
Inverse : $\dfrac{1}{u}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$
Puissance : u^n $(n \geq 1)$	$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$	Aucune
Racine carrée : $\sqrt{u}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$
Exponentielle : e^u	$(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$	Aucune