2) Continuité d'une fonction d'une variable réelle

A) Définition et interprétation graphique

Définition : Continuité en un point et sur un intervalle

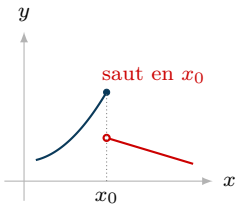
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
On dit que la fonction f est **continue en** x_0 lorsque :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est **continue sur l'intervalle** I si elle est continue en tout réel $x_0 \in I$.

Interprétation graphique

Concrètement, une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative peut être tracée **d'un trait continu**, sans « saut » ni interruption, c'est-à-dire **sans lever le crayon**.
Dans le cas contraire, un saut de la courbe en x_0 traduit une discontinuité.



Continuité des fonctions usuelles (admise)

Toutes les fonctions construites à partir des fonctions de référence du lycée (polynômes, exponentielle, trigonométriques, racine carrée, fractions rationnelles) sont **continues sur tout intervalle** inclus dans leur ensemble de définition.

B) Continuité et dérivabilité

Théorème : Lien fondamental entre dérivabilité et continuité

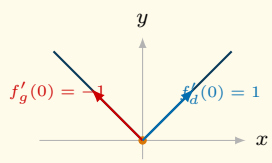
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

$$f \text{ est dérivable sur } I \implies f \text{ est continue sur } I$$

Attention : la réciproque est fausse

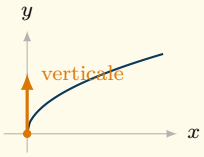
Une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Les deux contre-exemples classiques sont :

Contre-exemple 1 : $f(x) = |x|$ en 0



Continue en 0, mais **point anguleux** : les demi-tangentes diffèrent $\implies$ **non dérivable en 0**.

Contre-exemple 2 : $f(x) = \sqrt{x}$ en 0



Continue en 0, mais $\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$: **demi-tangente verticale** $\implies$ **non dérivable en 0**.

3) Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

A) Énoncé fondamental (Existence de solutions)

Théorème : Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

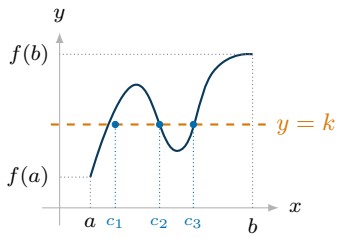
Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un réel** $c \in [a\,;\,b]$ tel que :

$$f(c) = k$$

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** dans $[a\,;\,b]$.

Interprétation géométrique

Pour joindre le point $A(a\,;\,f(a))$ au point $B(b\,;\,f(b))$ d'un trait continu sans rupture, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ coupe obligatoirement la droite horizontale d'équation $y = k$ au moins une fois.



B) Cas des fonctions continues strictement monotones (Unicité)

Théorème : Corollaire du TVI : stricte monotonie et unicité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (borné ou non).
Si f est **continue** et **strictement monotone** (croissante ou décroissante) sur I, alors pour tout réel k appartenant à l'intervalle image $f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** α dans I.

Rédaction modèle avec l'intervalle image $f(I)$

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$ définie sur l'intervalle $I = [1\,;\,2]$. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 5$.

f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $I = [1\,;\,2]$.
L'intervalle image est $f(I) = [\mathrm{e}^1\,;\,\mathrm{e}^2] \approx [2{,}7\,;\,7{,}3]$.
Or $5 \in f(I)$ car $\mathrm{e}^1 \leq 5 \leq \mathrm{e}^2$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un **unique** réel $\alpha \in [1\,;\,2]$ tel que $f(\alpha) = 5$.

Transposabilité aux bornes infinies

Cette formulation avec $f(I)$ est universelle : si $I =]0\,;\,+\infty[$ et f croissante, on aura $f(I) =]\lim_{x\to 0^+} f(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)[$, et la rédaction reste strictement identique.

C) Recherche et encadrement d'une solution : algorithme de dichotomie

Pour encadrer l'unique solution α de $f(x) = 0$ sur $[a\,;\,b]$, on découpe l'intervalle en deux à chaque tour :

1. On prend le milieu $m = \dfrac{a+b}{2}$.
2. Si $f(a) \times f(m) \leq 0$, alors $\alpha \in [a\,;\,m]$: la nouvelle borne droite devient m $(b \leftarrow m)$.
3. Sinon, $\alpha \in [m\,;\,b]$: la nouvelle borne gauche devient m $(a \leftarrow m)$.
4. On itère **tant que** l'amplitude $b-a > e$ (précision visée).

Script Python de dichotomie

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while (b - a) > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a, b)
```

Ouvrir et exécuter le script sur Basthon

Vitesse de division par deux

À chaque étape de la boucle `while`, la longueur de l'intervalle est divisée par 2. Après n étapes, l'amplitude est de :

$$\text{Amplitude} = \frac{b-a}{2^n}$$