# Terminale Spécialité Mathématiques

## Fiche 3 : Théorème des Valeurs Intermédiaires et signe d'une fonction

### Exercice 1 : Étude d'un polynôme de degré 3 et application directe du TVI

Soit $f$ la fonction polynôme définie sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

1. Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$ sur $[-1\,;\,3]$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-1\,;\,3]$.
   (b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f$ sur $[-1\,;\,3]$ (on précisera les valeurs exactes des images aux bornes et aux extrema).
3. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$.
   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   (c) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de $\alpha$ au centième.
4. En déduire le tableau de signes de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$.

### Exercice 2 : Fonction rationnelle

Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{4}{x}$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [1\,;\,6]$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

2. Justifier le sens de variation de $f$ sur $[1\,;\,6]$, puis dresser son tableau de variations complet.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $\beta$ sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[1\,;\,6]$, puis déterminer sa valeur exacte.
5. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[1\,;\,6]$.

### Exercice 3 : Fonction exponentielle et TVI par morceaux

Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$ par :

$$f(x) = (2x - 1)\,\mathrm{e}^x - 2$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [-1\,;\,3]$, on a $f'(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^x$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-1\,;\,3]$.
   (b) Dresser le tableau de variations complet de $f$ sur $[-1\,;\,3]$ (on arrondira les valeurs au dixième).
3. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $[-1\,;\,-0{,}5]$.
   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[-0{,}5\,;\,3]$.
   (c) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $\alpha$ au centième.
4. Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$.

## Exercice 4 : Fonction auxiliaire pour déterminer le signe d'une dérivée

Le but de cet exercice est d'étudier les variations d'une fonction $f$ à l'aide d'une fonction auxiliaire $g$.

**Partie A : Étude de la fonction auxiliaire $g$**

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par :

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12$$

1. Déterminer $g'(x)$, puis justifier que $g$ est strictement croissante sur $[0\,;\,4]$.
2. Dresser le tableau de variations de $g$ sur $[0\,;\,4]$.
3. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[0\,;\,4]$.
   (b) Donner un encadrement de $\alpha$ au centième à l'aide de la calculatrice.
4. En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

**Partie B : Variations de la fonction $f$**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x + \frac{12}{x}$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in ]0\,;\,4]$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

2. À l'aide de la Partie A, déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,4]$.
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f$ sur $]0\,;\,4]$.

## Exercice 5 : Fonction auxiliaire avec exponentielle et étude de variations

Le but de cet exercice est d'étudier les variations d'une fonction $f$ faisant intervenir l'exponentielle.

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire $g$**

Soit $g$ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ par :

$$g(x) = x\,\mathrm{e}^x - 2$$

1. Démontrer que pour tout $x \in [0\,;\,3]$, on a $g'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$.
2. En déduire le sens de variation de $g$ sur $[0\,;\,3]$, puis dresser son tableau de variations complet (on donnera les valeurs exactes des images aux bornes).
3. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[0\,;\,3]$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de $\alpha$ au centième.
4. Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

**Partie B : Étude des variations de la fonction $f$**

Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ par :

$$f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x - 2x$$

1. Démontrer que pour tout $x \in [0\,;\,3]$, on a $f'(x) = g(x)$.
2. En utilisant les résultats de la Partie A, donner le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,3]$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $[0\,;\,3]$ (on exprimera la valeur exacte du minimum en fonction de $\alpha$).