TERMINALE SPÉCIALITÉ — Lycée Yves Leborgne 2026 / 2027

Chapitre 3 : Suites numériques

1) Généralités et modes de définition

Approche continue vs discrète

Alors que les **fonctions** modélisent généralement une observation continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$, les **suites** modélisent une observation discrète (étape par étape, temps discret indexé par les entiers naturels).

Définition : Suite numérique

Une suite numérique (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$(u_n) : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{cases}$$

L'image de l'entier naturel n est traditionnellement notée u_n (appelé terme de rang n ou terme général).

A) Modes de génération d'une suite

Définition : Formule explicite

Le terme u_n est exprimé directement en fonction de n, de la forme _____, où f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$.

Calculs de termes avec une formule explicite

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$.

- $u_0 =$ _____
- $u_1 =$ _____
- $u_2 =$ _____
- $u_3 =$ _____

Définition : Formule de récurrence simple

On donne le premier terme et une relation permettant de calculer chaque terme à partir du précédent : _____.

Calculs de termes par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

- $u_0 = 1$
- $u_1 =$ _____
- $u_2 =$ _____
- $u_3 =$ _____

Autre exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_1 =$ _____
- $u_2 =$ _____
- $u_3 =$ _____

Variantes et récurrences élargies

- **Récurrence d'ordre 2 (formule élargie) :** suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

  Calcul des premiers termes : $F_2 = _$, $F_3 = _$, $F_4 = _$, $F_5 = _$.
- **Formule mixte $u_{n+1} = g(u_n, n)$:** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - $u_1 =$ _____
  - $u_2 =$ _____
  - $u_3 =$ _____
- **Suite définie par morceaux (suite de Syracuse) :** pour un premier terme $u_0 \in \mathbb{N}^*$,

  $$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

2) Sens de variation d'une suite

Définition : Croissance et décroissance

Soit $p \in \mathbb{N}$ et (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

- (u_n) est **croissante** à partir du rang p si et seulement si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **strictement croissante** à partir du rang p si et seulement si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si et seulement si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est **strictement décroissante** à partir du rang p si et seulement si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} < u_n$.
- (u_n) est **constante** à partir du rang p si et seulement si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.

Méthodes usuelles pour déterminer le sens de variation

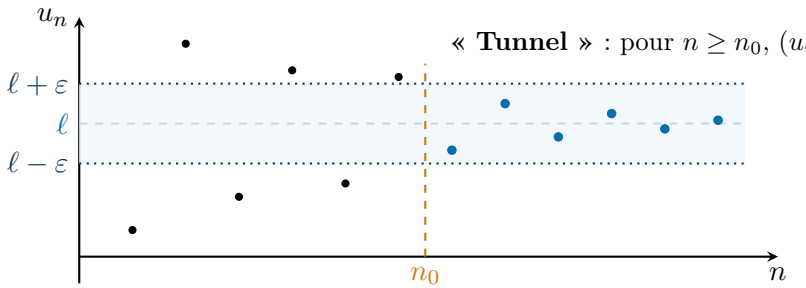
1. **Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ (méthode générale) :**
   - Si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
   - Si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
2. **Comparaison du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 (uniquement si $u_n > 0$ pour tout $n \geq p$) :**
   - Si pour tout $n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
   - Si pour tout $n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

3) Limites d'une suite

Définition : Limite finie : suite convergente

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) **converge vers** ℓ (et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$) si :

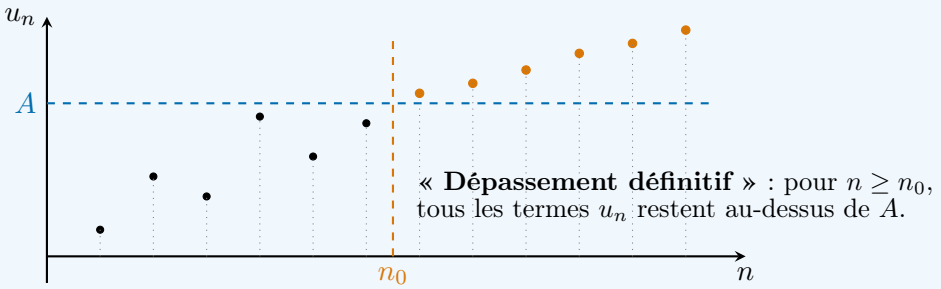
Autrement dit : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0. La suite reste aussi proche de ℓ qu'on le souhaite.



« **Tunnel** » : pour $n \geq n_0$, (u_n) reste piégée dans $]\ell - \varepsilon\,;\, \ell + \varepsilon[$

Définition : Limite infinie : divergence vers l'infini

- On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (noté $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) si :



« **Dépassement définitif** » : pour $n \geq n_0$, tous les termes u_n restent au-dessus de A.

- On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ (noté $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) si :

Définition : Suite divergente

Une suite est dite **divergente** lorsqu'elle ne converge pas.

Divergence sans limite

Diverger signifie ne pas converger, et pas nécessairement tendre vers l'infini. Une suite divergente peut n'admettre aucune limite :

- $u_n = (-1)^n$ alterne indéfiniment entre 1 et -1 : pas de limite (suite bornée mais divergente).
- $v_n = n \times (-1)^n$ oscille avec une amplitude infinie : pas de limite (suite non bornée et divergente).

A) Limites usuelles

Propriété : Limites usuelles de référence

- **Puissances de n :**

$$\lim_{n\to+\infty} n = ____ \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = ____ \qquad \lim_{n\to+\infty} n^k = ____ \ (k \geq 1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = ____$$

- **Inverses :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = _ \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = _ \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = _ \ (k \geq 1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = _$$

- **Suite géométrique q^n $(q \in \mathbb{R})$:**

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} ____ & \text{si } q > 1 \\ _ & \text{si } q = 1 \\ _ & \text{si } -1 < q < 1 \\ _____ & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

B) Opérations sur les limites de suites

Dans les tableaux ci-dessous, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. La mention **FI** désigne une **Forme Indéterminée**.

Propriété : Limite d'une somme : $\lim(u_n + v_n)$

$\lim(u_n + v_n)$	$\lim v_n = \ell'$	$\lim v_n = +\infty$	$\lim v_n = -\infty$
$\lim u_n = \ell$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$\lim u_n = -\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

Propriété : Limite d'un produit : $\lim(u_n \times v_n)$

$\lim(u_n \times v_n)$	$\lim v_n = \ell' > 0$	$\lim v_n = \ell' < 0$	$\lim v_n = 0$	$\lim v_n = +\infty$	$\lim v_n = -\infty$
$\lim u_n = \ell > 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n = \ell < 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim u_n = 0$	0	0	0	**FI**	**FI**
$\lim u_n = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**	$-\infty$	$+\infty$

Propriété : Limite de l'inverse : $\lim \dfrac{1}{v_n}$

$\lim v_n$	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$ (0^+)	0 avec $v_n < 0$ (0^-)
$\lim \dfrac{1}{v_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Détermination de la limite d'un quotient

Pour déterminer la limite d'un quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$, on utilise la règle du produit avec l'inverse :

$$\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$$

Remarque

Les théorèmes de comparaison (théorème des gendarmes, théorèmes de majoration et de minoration) feront l'objet de compléments dans la partie suivante du cours.

4) Rappels : Suites arithmétiques et suites géométriques

Évolution constante vs Évolution en pourcentage

- Une **suite arithmétique** modélise un phénomène à **évolution constante** : on ajoute une quantité constante r à chaque étape ($u_{n+1} = u_n + r$).
- Une **suite géométrique** modélise un phénomène à **évolution en pourcentage** :
  - Une **augmentation** de $t\,\%$ revient à multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$.
  - Une **diminution** de $t\,\%$ revient à multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

  Chaque étape correspond ainsi à la multiplication par le coefficient multiplicateur constant q ($u_{n+1} = q \times u_n$).

Caractéristique	**Suite arithmétique** ($r \in \mathbb{R}^*$)	**Suite géométrique** ($q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$)
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Formule explicite (rang 0)	$u_n = u_0 + n\,r$	$u_n = u_0 \times q^n$
Formule généralisée (rang p)	$u_n = u_p + (n-p)\,r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Sens de variation	• Si $r > 0$: strictement croissante • Si $r < 0$: strictement décroissante	Pour $u_0 > 0$: • Si $q > 1$: strictement croissante • Si $0 < q < 1$: strictement décroissante
Somme de termes consécutifs	$S = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = (\text{premier terme}) \times \dfrac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Comportement à l'infini ($\lim\limits_{n\to+\infty}$)	• Si $r > 0$: $\lim u_n = +\infty$ • Si $r < 0$: $\lim u_n = -\infty$	Pour $u_0 > 0$: • Si $q > 1$: $\lim u_n = +\infty$ • Si $-1 < q < 1$: $\lim u_n = 0$ • Si $q \leq -1$: pas de limite (diverge)

Cas particuliers des suites constantes

- Si la raison d'une suite arithmétique est $r = 0$, tous ses termes sont égaux ($u_{n+1} = u_n$) : la suite est constante.
- Si la raison d'une suite géométrique est $q = 1$, tous ses termes sont égaux ($u_{n+1} = 1 \times u_n$) : la suite est constante.
- Si la raison d'une suite géométrique est $q = 0$, tous ses termes sont nuls à partir du rang 1 ($u_{n+1} = 0 \times u_n = 0$) : la suite est stationnaire.

C'est pour cette raison qu'on étudie spécifiquement $r \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.