TERMINALE SPÉCIALITÉ — Lycée Yves Leborgne 2026 / 2027

Chapitre 3 : Suites numériques (partie 2)

2) Principe du raisonnement par récurrence

Propriété : Théorème

On considère une propriété P_n définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, où $n_0 \in \mathbb{N}$.

- Si P_{n_0} est vraie (initialisation) ;
- Si, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, P_n vraie implique P_{n+1} vraie (hérédité) ;

alors P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Structure de rédaction

Démontrons par récurrence que la propriété

$$P_n : \text{« } \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ »}$$

est vraie pour tout entier naturel n (avec $n \geq n_0$, à remplacer par la valeur de l'énoncé).

Initialisation :

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

Donc P_{n_0} est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$.

Supposons P_n vraie.

$\vdots$

Alors P_{n+1} est vraie.

Conclusion :

P_n est vraie au rang n_0 et P_n est héréditaire,

donc P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$: « $\ldots\ldots\ldots\ldots$ ».

Point historique

- **Francesco Maurolico** (1575), mathématicien sicilien, est considéré comme le premier à utiliser explicitement ce type de raisonnement, dans ses travaux d'arithmétique.
- **Blaise Pascal**, dans son *Traité du triangle arithmétique* (rédigé en 1654), formule clairement les deux étapes (un premier cas, puis le passage d'un cas au suivant) pour démontrer les propriétés de son célèbre triangle.
- À la fin du XIXe siècle, **Richard Dedekind** (1888) puis **Giuseppe Peano** (1889) fondent rigoureusement l'arithmétique : le principe de récurrence devient l'un des axiomes qui définissent les entiers naturels.
- **Henri Poincaré**, dans *La Science et l'hypothèse* (1902), le qualifie de « raisonnement mathématique par excellence » : il permet de démontrer une infinité de propriétés en un nombre fini d'étapes.