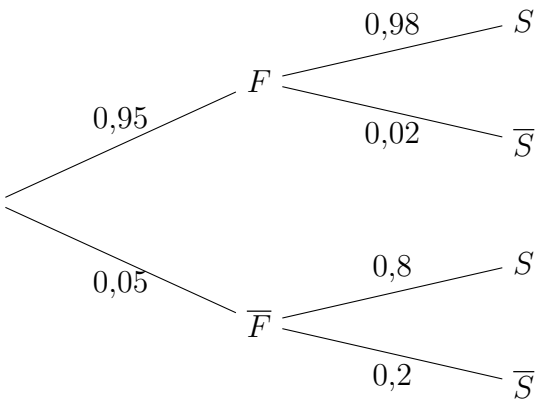
Mathématiques Terminale Spécialité
Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1 (10 points)

Partie A

1. D'après l'énoncé, $P(F) = 0{,}95$ et $P_F(S) = 0{,}98$.
2. a. On a $P(\overline{F}) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ et $P_F(\overline{S}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$. Les probabilités des branches issues de $\overline{F}$ ne sont pas données directement : elles sont calculées à la question b.



b. L'énoncé indique que 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests, c'est-à-dire $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0{,}01$. Il s'agit d'une probabilité d'intersection et non d'une probabilité conditionnelle. On a donc :

$$P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{S})}{P(\overline{F})} = \frac{0{,}01}{0{,}05} = 0{,}2.$$

On en déduit $P_{\overline{F}}(S) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

3. $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0{,}95 \times 0{,}98 = 0{,}931$.
4. F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S) = 0{,}931 + 0{,}05 \times 0{,}8 = 0{,}931 + 0{,}04 = 0{,}971.$$

Arrondie au centième, $P(S) \approx 0{,}97$.

5. On cherche $P_S(F)$:

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}931}{0{,}971} \approx 0{,}96.$$

Partie B

1. Option 1 : gestion interne

a. Un jouet échoue à exactement un des deux tests s'il réussit le test de fabrication et échoue au test de sécurité, ou s'il échoue au test de fabrication et réussit le test de sécurité. Ces deux évènements sont incompatibles, donc la probabilité cherchée vaut :

$$P(F \cap \overline{S}) + P(\overline{F} \cap S) = 0{,}95 \times 0{,}02 + 0{,}05 \times 0{,}8 = 0{,}019 + 0{,}04 = 0{,}059.$$

b. X prend les valeurs 0, 15 et 50 avec :

- $P(X = 0) = P(F \cap S) = 0{,}931$;
- $P(X = 15) = 0{,}059$;
- $P(X = 50) = P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0{,}01$.

x_i	0	15	50
$P(X = x_i)$	0,931	0,059	0,01

On vérifie que $0{,}931 + 0{,}059 + 0{,}01 = 1$.

c. $E(X) = 0 \times 0{,}931 + 15 \times 0{,}059 + 50 \times 0{,}01 = 0{,}885 + 0{,}5 = 1{,}385$.
Interprétation : sur un grand nombre de jouets produits, l'option 1 coûte en moyenne environ 1,39 € par jouet à l'entreprise.

d. On calcule d'abord $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}931 + 15^2 \times 0{,}059 + 50^2 \times 0{,}01 = 13{,}275 + 25 = 38{,}275.$$

Donc :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 38{,}275 - 1{,}385^2 = 38{,}275 - 1{,}918\,225 = 36{,}356\,775.$$

Arrondie au centième, $V(X) \approx 36{,}36$.

2. Option 2 : contrat d'assurance

a. L'entreprise paie toujours la prime de m euros.
- Si le jouet réussit les deux tests, l'assureur ne verse rien : $Y = m$.
- Si le jouet échoue à au moins un test, il est retiré sans frais et l'assureur verse 50 € : $Y = m - 50$.

Les valeurs possibles de Y sont donc m et $m - 50$.

b. L'évènement « le jouet échoue à au moins un test » est l'évènement contraire de $F \cap S$. Donc :

$$P(Y = m) = P(F \cap S) = 0{,}931 \quad \text{et} \quad P(Y = m - 50) = 1 - 0{,}931 = 0{,}069.$$

y_i	m	$m - 50$
$P(Y = y_i)$	0,931	0,069

c. $E(Y) = m \times 0{,}931 + (m - 50) \times 0{,}069 = 0{,}931\,m + 0{,}069\,m - 3{,}45 = m - 3{,}45$.

d. L'option 2 est plus économique en moyenne que l'option 1 si et seulement si $E(Y) < E(X)$:

$$m - 3{,}45 < 1{,}385 \iff m < 4{,}835.$$

Comme $m > 0$, l'option 2 est plus économique en moyenne lorsque la prime vérifie $0 < m < 4{,}835$, c'est-à-dire lorsqu'elle est strictement inférieure à 4,835 €.

Exercice 2

(3 points)

1. $f(x) = (3x + 4)\,\mathrm{e}^x$. On pose $u(x) = 3x + 4$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. D'après $(uv)' = u'v + uv'$:
$$f'(x) = 3\,\mathrm{e}^x + (3x + 4)\,\mathrm{e}^x = (3x + 7)\,\mathrm{e}^x.$$
2. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = 1 + x^2$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$; v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:
$$f'(x) = \frac{1 \times (1 + x^2) - x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$
3. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x}$. D'après $(uv)' = u'v + uv'$:
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 2x\,\mathrm{e}^{-2x} = (1 - 2x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Exercice 3

(7 points)

1. f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $[-2\,;3]$, et :

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 2.$$

2. a. $f'(x)$ est un trinôme de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 6 \times 2 = 4 - 48 = -44$.
Comme $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine réelle et il est du signe de son coefficient dominant $6 > 0$. Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [-2\,;3]$.

b. f est donc strictement croissante sur $[-2\,;3]$. On calcule :

$$f(-2) = 2 \times (-8) - 4 - 4 - 3 = -27 \quad \text{et} \quad f(3) = 54 - 9 + 6 - 3 = 48.$$

x	-2		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-27	↗	48

3. Une équation de T_0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or $f(0) = -3$ et $f'(0) = 2$, donc :

$$T_0 : y = 2x - 3.$$

4. a. f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $I = [-2\,;3]$.
L'intervalle image est $f(I) = [f(-2)\,;f(3)] = [-27\,;48]$.
Or $10 \in f(I)$ car $-27 \leq 10 \leq 48$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un **unique** réel $\alpha \in [-2\,;3]$ tel que $f(\alpha) = 10$.

b. À la calculatrice, $f(1{,}85) \approx 9{,}94 < 10$ et $f(1{,}86) \approx 10{,}13 > 10$. Donc :

$$1{,}85 < \alpha < 1{,}86.$$

5. a. $f(1) = 2 - 1 + 2 - 3 = 0$, donc 1 est une racine de $f(x)$.

b. Pour tout réel x :

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

Par identification avec $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ c - b = 2 \\ -c = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

(la troisième équation, $3 - 1 = 2$, est bien vérifiée). On peut aussi obtenir ce résultat par division euclidienne de $2x^3 - x^2 + 2x - 3$ par $x - 1$.
Ainsi, pour tout $x \in [-2\,;3]$, $f(x) = (x - 1)(2x^2 + x + 3)$.

6. a. Le discriminant du trinôme $2x^2 + x + 3$ vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23$.
Comme $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine réelle et il est du signe de son coefficient dominant $2 > 0$. Donc $2x^2 + x + 3 > 0$ pour tout réel x.

b. Le signe de $f(x)$ est donc celui de $x-1$:

x	-2		1		3
$x-1$		$-$	0	$+$	
$2x^2+x+3$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$f(x) < 0$ sur $[-2\,;1[$, $f(1) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $]1\,;3]$.