Terminale Spécialité Mathématiques
Fiche 2 : Études de fonctions

Exercice 1 : Étude d'une fonction polynôme de degré 3

Soit f la fonction polynôme définie sur l'intervalle $[0\,;\,3{,}5]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $[0\,;\,3{,}5]$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,3{,}5]$.
   (b) En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur cet intervalle (on précisera les valeurs exactes aux bornes et aux extrema locaux).
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_2$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
4. (a) Vérifier que 2 est une racine de $f(x)$.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [0\,;\,3{,}5]$:
   $$f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$
5. (a) Déterminer les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.
   (b) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,3{,}5]$.

Exercice 2 : Étude d'une fonction polynôme de degré 3

Soit f la fonction polynôme définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $[-2\,;\,4]$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;\,4]$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle (on précisera les images aux bornes).
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_1$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. (a) Vérifier que 1 est une racine de $f(x)$.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:
   $$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$
5. (a) Justifier que le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'admet aucune racine réelle.
   (b) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

Exercice 3 : Étude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[3\,;\,7]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [3\ ;\ 7]$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[3\ ;\ 7]$.
   (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur cet intervalle (on donnera les valeurs exactes des images aux bornes et à l'extremum).
3. Déterminer une équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_4$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.
4. Justifier que, pour tout $x \in [3\ ;\ 7]$, on a $f(x) > 0$.

Exercice 4 : Étude d'une fonction produit avec exponentielle

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = (3 - 2x)\,\mathrm{e}^{2x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [-2\ ;\ 2]$, on a :

$$f'(x) = 4(1 - x)\,\mathrm{e}^{2x}$$

2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\ ;\ 2]$.
   (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur cet intervalle (on précisera les valeurs exactes des images aux bornes et à l'extremum).
3. Déterminer une équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. (a) Résoudre sur $[-2\ ;\ 2]$ l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.

Exercice 5 : Étude d'une fonction produit avec exponentielle

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = (x^2 - x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [-1\ ;\ 4]$, on a :

$$f'(x) = -x(x - 3)\,\mathrm{e}^{-x}$$

2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-1\ ;\ 4]$.
   (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur cet intervalle (on précisera les valeurs exactes des images aux bornes et aux extrema locaux).
3. Déterminer une équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. (a) Déterminer les valeurs exactes, puis approchées au centième, des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-1\ ;\ 4]$.
   (b) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$.