Chapitre I : Probabilités

Fiche 3 : Dénombrement

Exercice 1 : Principe additif et formule du crible

Une enquête menée auprès de 120 élèves de Terminale sur leurs choix d'options révèle que :

— 65 élèves suivent l'option Mathématiques Expertes (ensemble M) ;

— 40 élèves suivent l'option Droit et Grands Enjeux du Monde Contemporain (ensemble D) ;

— 15 élèves suivent simultanément ces deux options.

1) Déterminer le nombre d'élèves qui suivent au moins l'une de ces deux options.

2) Combien d'élèves ne suivent aucune de ces deux options ?

3) Parmi les 65 élèves faisant Mathématiques Expertes, 35 préparent une CPGE scientifique, 20 une licence universitaire et 10 une école d'ingénieurs post-bac (chaque élève ayant fait un vœu unique). Justifier par le principe additif le calcul du cardinal de M.

Exercice 2 : Digicodes et mots de passe : la méthode des cases

On dispose des 6 caractères suivants : $\{A, B, C, D, 1, 2\}$. On souhaite créer un identifiant ou code secret.

1) **Cas 1 (avec répétition) :** On crée un code de 4 caractères où les répétitions sont autorisées (exemple : $AA1B$). Combien de codes distincts peut-on composer ?

2) **Cas 2 (sans répétition) :** On crée un code de 4 caractères tous distincts (exemple : $AC12$). Combien de codes distincts peut-on composer ?

3) **Cas 3 (permutation) :** On compose un mot de passe en utilisant les 6 caractères sans répétition. Combien de mots de passe différents peut-on obtenir ?

4) **Cas 4 (contrainte d'emplacement) :** Le mot de passe de 4 caractères distincts doit impérativement commencer par une lettre et se terminer par un chiffre. Combien de codes répondent à cette contrainte ?

Exercice 3 : Courses hippiques et podiums

Dix chevaux participent au départ du Grand Prix. On suppose qu'il n'y a pas d'ex æquo.

1) Combien de tiercés dans l'ordre (attribution des 1re, 2e et 3e places) sont envisageables ?

2) Un parieur pronostique que le cheval numéro 7 arrive obligatoirement premier. Combien de tiercés dans l'ordre correspondent à cette prédiction ?

3) Combien de tiercés dans l'ordre comportent le cheval numéro 7 parmi les trois premiers (à n'importe quelle place du podium) ?

Exercice 4 : Constitution de commissions et délégations

Un conseil d'administration est composé de 16 membres : 10 femmes et 6 hommes.

1) On doit désigner un bureau hiérarchisé composé d'une Présidente ou d'un Président, d'un Trésorier et d'un Secrétaire (aucun cumul de fonction). Combien de bureaux distincts peut-on former ?

2) On souhaite à présent former une commission de travail de 3 membres choisis sans ordre ni

hiérarchie parmi les 16 membres.

a) Combien de commissions différentes peut-on constituer ?

b) Quel calcul simple permet de retrouver ce résultat à partir du nombre de bureaux obtenus à la question 1 ?

3) Combien de commissions de 3 membres comportent :

a) Exclusivement des femmes ?

b) Exactement 2 femmes et 1 homme ?

c) Au moins un homme ?

Exercice 5 : Tirages simultanés dans une urne

Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher : 7 rouges, 5 vertes et 3 blanches. On tire simultanément 4 boules de l'urne.

1) Combien de tirages distincts de 4 boules peut-on obtenir au total ?

2) Combien de tirages contiennent :

a) Exactement 2 boules rouges et 2 boules vertes ?

b) Des boules toutes de la même couleur ?

c) Au moins une boule blanche ?

Exercice 6 : Anagrammes et gestion des répétitions de lettres

1) Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres du mot **PRISME** (6 lettres distinctes) ?

2) On s'intéresse à présent aux anagrammes du mot **BANANE** (6 lettres : trois A, deux N et un B). En considérant un gabarit de 6 cases consécutives _ _ _ _ _ _, dénombrer pas à pas le nombre d'anagrammes possibles en justifiant les choix de chaque lettre.

3) Même question avec les anagrammes du mot **EXCELLENCE** (10 lettres).

Exercice 7 : Mains de poker dans un jeu de 32 cartes

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Une telle sélection de 5 cartes non ordonnées est appelée une « main ».

1) Combien de mains différentes peut-on obtenir au total ?

2) Combien de mains contiennent :

a) Exactement 5 cartes de couleur Cœur ?

b) Exactement les 4 As ?

c) Exactement 2 Rois et 3 Dames (un « Full ») ?

d) Au moins un As ?

Exercice 8 : Choix d'ingrédients et nombre de parties d'un ensemble

Une pizzeria propose une formule « pizza personnalisée » à partir d'une pâte de base sur laquelle le client peut choisir d'ajouter ou non des ingrédients parmi une liste de 6 propositions : {Champignons, Olives, Jambon, Mozzarella, Piments, Anchois}.

1) Une recette est définie comme une partie (un sous-ensemble) de cet ensemble de 6 ingrédients. Combien de pizzas distinctes peut-on concevoir au total (en incluant la pizza sans aucun supplément) ?

2) Dénombrer parmi ces recettes :

a) Celles comportant exactement 3 ingrédients supplémentaires ;

b) Celles comportant au moins 5 ingrédients supplémentaires ;

c) Celles contenant obligatoirement des Olives, mais aucun Piment.

Exercice 9 : Trajets sur un quadrillage

Dans un repère, un point mobile part de l'origine $(0\,;0)$ pour rejoindre le point de coordonnées $(5\,;3)$. À chaque étape, le point ne peut se déplacer que d'une unité vers la droite (D) ou d'une unité vers le haut (H).

1) Combien d'étapes au total composent un trajet reliant ces deux points ?

2) Justifier qu'un trajet est entièrement déterminé par le choix des emplacements des déplacements vers le haut (H) dans la suite des étapes.

3) En déduire le nombre total de chemins possibles pour aller de $(0\,;0)$ à $(5\,;3)$.

4) Combien de ces chemins passent obligatoirement par le point intermédiaire de coordonnées $(2\,;2)$?