Chapitre I : Probabilités

Partie 3 : Loi de Bernoulli et loi binomiale

3) Loi de Bernoulli et loi binomiale

A) Loi de Bernoulli

Définition : Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne comportant exactement que deux issues possibles :

- L'une appelée **succès**, notée S, dont la probabilité est $P(S) = p$ (avec $0 < p < 1$) ;
- L'autre appelée **échec**, notée $\overline{S}$, dont la probabilité est $P(\overline{S}) = 1 - p$ (souvent notée q).

Définition : Loi de Bernoulli

Soit une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On associe la variable aléatoire X qui prend la valeur **1** en cas de succès et la valeur **0** en cas d'échec.
La loi de probabilité de X est appelée **loi de Bernoulli de paramètre** p. Sa loi est donnée par le tableau :

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Propriété : Espérance et variance d'une variable de Bernoulli

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (noté $X \sim \mathcal{B}(p)$), alors :

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

B) Loi binomiale

Définition : Schéma de Bernoulli

On appelle **schéma de Bernoulli de paramètres** n **et** p la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de même probabilité de succès p.

Indépendance et tirages

L'indépendance des épreuves garantit que la probabilité d'obtenir un succès à une étape reste égale à p, sans dépendre des résultats obtenus aux étapes précédentes.

- Dans le cadre de tirages successifs dans une urne ou une population, un schéma de Bernoulli correspond à des tirages **avec remise**.
- Si le tirage s'effectue **sans remise**, on assimile la situation à un tirage avec remise dès lors que la population est suffisamment grande devant la taille de l'échantillon.

Définition : Loi binomiale

Soit un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves indépendantes, avec une probabilité de succès p à chaque épreuve.
La variable aléatoire X comptabilisant le **nombre total de succès** obtenus au cours des n épreuves suit la **loi binomiale de paramètres n et p**.
Formulation et notation : On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, et on note également :

$$X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$$

L'ensemble des valeurs prises par X est $\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,n\}$.

Théorème : Loi de probabilité d'une variable binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$.
Pour tout entier $k \in \{0\,;\,1\,;\ldots\,;\,n\}$, la probabilité d'obtenir exactement k succès parmi n épreuves est :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Justification à l'aide du dénombrement et de l'arbre

Dans l'arbre pondéré associé aux n tirages successifs :

- Chaque chemin réalisant exactement k succès contient k branches associées au succès S (de probabilité p) et $n-k$ branches associées à l'échec $\overline{S}$ (de probabilité $1-p$).
- Par indépendance des épreuves, la probabilité d'un tel chemin est $p^k \times (1-p)^{n-k}$.
- Le nombre de chemins distincts comportant exactement k succès parmi les n épreuves correspond au nombre de manières de placer les k succès dans les n étapes, c'est-à-dire le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

On retrouve ainsi directement la formule par le principe additif : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Somme des probabilités et binôme de Newton

La somme des probabilités de toutes les valeurs possibles prises par X est bien égale à 1. En appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1^n = 1$$

C) Espérance, variance et écart-type

Propriété : Indicateurs de la loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p ($X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$). On a :

- **Espérance :** $E(X) = np$
- **Variance :** $V(X) = np(1-p)$
- **Écart-type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Interprétation de l'espérance

L'espérance $E(X) = np$ s'interprète comme le nombre moyen de succès que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois cette série de n épreuves.

D) Exercice d'application du cours

Répondre au hasard à un QCM

Énoncé : Un candidat répond au hasard à un QCM comportant 8 questions indépendantes. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses obtenues.

Questions :

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$ à l'aide de la formule du cours (arrondir à 10^{-4}).
3. En déduire la probabilité d'obtenir au plus deux bonnes réponses $P(X \leq 2)$.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité d'obtenir au plus trois bonnes réponses $P(X \leq 3)$ à 10^{-4} près.
5. À l'aide de la calculatrice, calculer la probabilité d'avoir au moins six bonnes réponses $P(X \geq 6)$ à 10^{-4} près.
6. Déterminer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

Correction et utilisation de la calculatrice :

1. On répète 8 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli où le succès est « répondre juste », de probabilité $p = \dfrac{1}{4}$. X comptabilise le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

2. D'après la formule de la loi binomiale $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$:

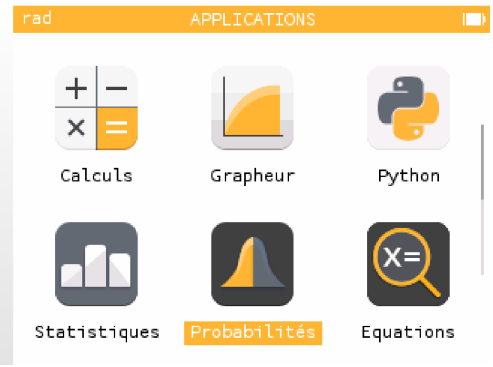
- $P(X = 0) = \binom{8}{0} \times 0{,}25^0 \times 0{,}75^8 = 0{,}75^8 \approx 0{,}1001$
- $P(X = 1) = \binom{8}{1} \times 0{,}25^1 \times 0{,}75^7 = 8 \times 0{,}25 \times 0{,}75^7 \approx 0{,}2670$
- $P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0{,}25^2 \times 0{,}75^6 = 28 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75^6 \approx 0{,}3115$

3. L'événement « obtenir au plus deux bonnes réponses » correspond à $X \leq 2$:

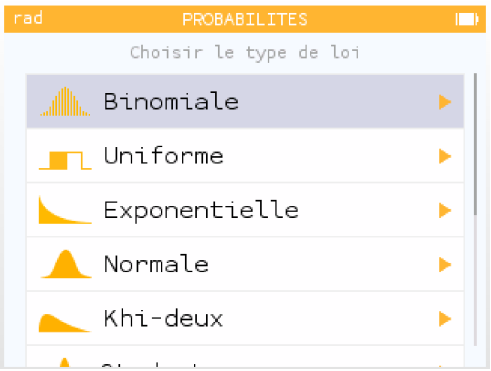
$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}1001 + 0{,}2670 + 0{,}3115 \approx 0{,}6786$$

La calculatrice donne $P(X \leq 2) \approx 0{,}6785$ (voir ci-dessous) : l'écart vient du cumul des arrondis. Pour un résultat juste à 10^{-4} près, on conserve les valeurs exactes jusqu'au bout du calcul.

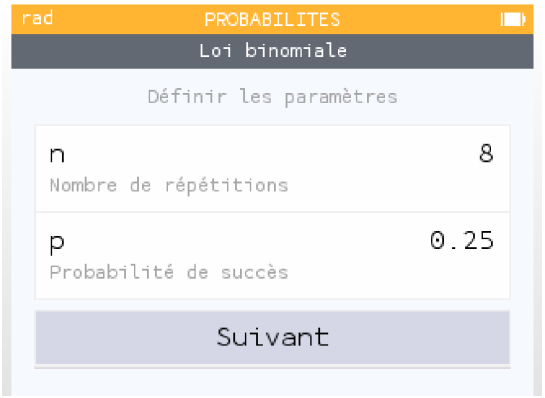
4 et 5. Utilisation de la calculatrice NumWorks :



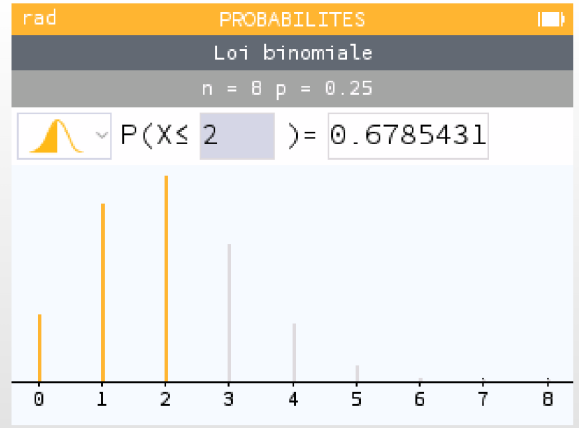
Sur le menu principal, choisir l'icône **Probabilités**.



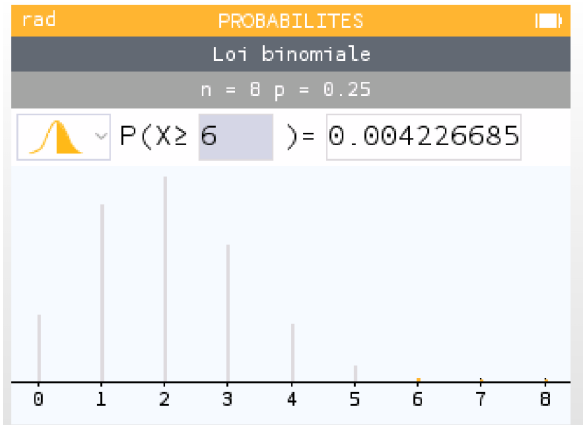
Choisir ensuite le type de loi : **Binomiale**.



Rentrer les paramètres n et p, ici $n = 8$ et $p = 1/4 = 0{,}25$, puis valider sur **Suivant**.



Pour $P(X \leq k)$: L'icône par défaut est déjà $\leq$. On entre 2 et on lit $P(X \leq 2) \approx 0{,}6785$ (vérification de la question 3). De la même façon, on entre 3 et on lit :
$P(X \leq 3) \approx 0{,}8862$.



Pour $P(X \geq 6)$: Sélectionner la petite icône à gauche de $P(X)$ pour choisir le symbole $\geq$, puis entrer 6. On lit directement :
$P(X \geq 6) \approx 0{,}0042$.

Autres calculatrices

- **TI :** `binomFRép(n,p,k)` donne $P(X \leq k)$ et `binomFdp(n,p,k)` donne $P(X = k)$ (menu `distrib`).
- **Casio :** `BinomialCD` donne $P(X \leq k)$ et `BinomialPD` donne $P(X = k)$ (menu `STAT`, puis `DIST`, puis `BINOMIAL`).
- Pour $P(X \geq 6)$, on peut toujours passer par l'événement contraire : $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$.

6. $E(X) = n \times p = 8 \times 0{,}25 = 2$. En répondant au hasard, le candidat peut espérer obtenir en moyenne 2 bonnes réponses sur les 8 questions.