TMATHS2 Lycée Yves Leborgne 2026 / 2027

Chapitre I : Probabilités

Partie 1

1) Rappels

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble de tous les résultats possibles est un ensemble fini appelé **univers**, généralement noté Ω.

Les éléments de Ω sont appelés les **éventualités** (ou **issues**).

A) Loi de probabilité

Définition

Soit un univers fini $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque éventualité e_i un nombre réel $p_i = P(\{e_i\})$ tel que :

- Pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$, $0 \leq p_i \leq 1$.
- La somme de toutes les probabilités vaut 1, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Forme des résultats

Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. Elle peut être exprimée sous trois formes :

- Sous forme d'une **fraction** (de préférence irréductible), par exemple $\frac{1}{4}$.
- Sous forme d'un **nombre décimal** (valeur exacte ou approchée), par exemple 0,25.
- Sous forme de **pourcentage**, par exemple 25 %.

Définition

Un **événement** est une partie (un sous-ensemble) de l'univers Ω, c'est-à-dire un ensemble constitué d'une ou plusieurs éventualités.
La **probabilité d'un événement** A, notée $P(A)$, est égale à la somme des probabilités des éventualités qui le composent.
En particulier :

$$P(\emptyset) = 0 \quad \text{et} \quad P(\Omega) = 1$$

Propriété : Événement contraire

L'événement contraire d'un événement A, noté $\overline{A}$, est constitué de toutes les éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A.
On a la relation :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Définition : Union et Intersection

Soient A et B deux événements d'un univers Ω :

- L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$ (lire « A inter B »), est l'événement constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B.
- L'**union** de A et B, notée $A \cup B$ (lire « A union B »), est l'événement constitué des éventualités qui appartiennent à A ou à B (au moins à l'un des deux).

Propriété

Pour tous événements A et B d'un univers Ω :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple

On lance un dé truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Les faces 2, 3, 4 et 5 ont la même probabilité d'apparaître, notée x. Le 6 apparaît deux fois moins souvent que le 2, et le 1 apparaît deux fois plus souvent que le 2.
On a donc : $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = x$, $\quad p_6 = \dfrac{x}{2}$ $\quad$ et $\quad p_1 = 2x$.
Comme la somme des probabilités est égale à 1 :

$$2x + x + x + x + x + \frac{x}{2} = 1 \iff \frac{13}{2}x = 1 \iff x = \frac{2}{13}$$

Loi de probabilité :

Issue e_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité p_i	$\frac{4}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$

On considère les événements :

- A : « le nombre obtenu est pair », soit $A = \{2; 4; 6\}$.
- B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 4 », soit $B = \{4; 5; 6\}$.

Calculer :

- $P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{2}{13} + \dfrac{2}{13} + \dfrac{1}{13} = \dfrac{5}{13}$
- $P(B) = p_4 + p_5 + p_6 = \dfrac{2}{13} + \dfrac{2}{13} + \dfrac{1}{13} = \dfrac{5}{13}$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{5}{13} = \dfrac{8}{13}$
- $A \cap B = \{4; 6\}$, d'où $P(A \cap B) = p_4 + p_6 = \dfrac{2}{13} + \dfrac{1}{13} = \dfrac{3}{13}$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{5}{13} + \dfrac{5}{13} - \dfrac{3}{13} = \dfrac{7}{13}$

B) Équiprobabilité

Définition

Lorsque toutes les issues d'un univers fini ont la même probabilité d'apparaître, on dit que la loi de probabilité est une **loi d'équiprobabilité**.

Propriété

Si la loi sur un univers fini Ω est une loi d'équiprobabilité, alors pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues de } \Omega}$$

Exemple

Une urne contient 9 jetons indiscernables au toucher :

— 5 jetons ronds : 2 bleus et 3 rouges ;

— 4 jetons carrés : 1 bleu et 3 rouges.

On tire au hasard un jeton dans l'urne. Comme les jetons sont indiscernables au toucher, la situation est une situation d'équiprobabilité. L'univers Ω comporte 9 issues ($\text{Card}(\Omega) = 9$).
On considère les événements :

— A : « Le jeton tiré est bleu »

— B : « Le jeton tiré est rond »

1) Calcul de $P(A)$ et $P(B)$:

— Il y a au total $2 + 1 = 3$ jetons bleus dans l'urne ($\text{Card}(A) = 3$), donc :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33 \quad (33{,}3\,\%)$$

— Il y a 5 jetons ronds dans l'urne ($\text{Card}(B) = 5$), donc :

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56 \quad (55{,}6\,\%)$$

2) Événement $\overline{A}$:

— **Phrase :** « Le jeton tiré n'est pas bleu » (c'est-à-dire « Le jeton tiré est rouge »).

— **Probabilité :**

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

3) Événement $A \cap B$:

— **Phrase :** « Le jeton tiré est à la fois bleu et rond ».

— **Probabilité :** Il y a 2 jetons ronds bleus dans l'urne ($\text{Card}(A \cap B) = 2$), donc :

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{9}$$

4) Événement $A \cup B$:

— **Phrase :** « Le jeton tiré est bleu ou rond » (au moins l'un des deux).

— **Probabilité :**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Vérification directe : les jetons favorables sont les 5 ronds plus l'unique carré bleu, soit $\text{Card}(A \cup B) = 6$, d'où $\dfrac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

C) Conditionnement

Définition : Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $P(A) > 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, notée $P_A(B)$, le nombre réel défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriété : Cas d'équiprobabilité

Si la loi sur Ω est une loi d'équiprobabilité et si A est un événement non vide ($\text{Card}(A) \neq 0$), alors :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables à la fois à } A \text{ et } B}{\text{nombre d'issues de } A}$$

Démonstration :

Dans le cas d'une situation d'équiprobabilité sur un univers fini Ω, on a :

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} \quad \text{et} \quad P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

D'après la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)}}{\dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} \times \frac{\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(A)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

□

Propriété : Probabilité de l'intersection

Soient A et B deux événements d'un univers Ω :

— Si $P(A) > 0$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

— Si $P(B) > 0$:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Définition : Partition de l'univers

Soient n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de probabilités non nulles.
On dit que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forme une **partition de l'univers** Ω si :

1) Ils sont deux à deux disjoints (incompatibles) : pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
2) Leur réunion forme l'univers tout entier : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Cas particulier fréquent : Pour tout événement A tel que $0 < P(A) < 1$, l'ensemble $\{A; \overline{A}\}$ forme une partition de Ω.

Propriété : Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ une partition de l'univers Ω.
Pour tout événement B de Ω :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

C'est-à-dire :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P_{A_i}(B)$$

Cas particulier (avec un événement A et son contraire $\overline{A}$) :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

D) Événements indépendants

Définition : Indépendance de deux événements

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
On dit que les événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriété : Caractérisation avec les probabilités conditionnelles

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) A et B sont indépendants ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$).
2) $P_A(B) = P(B)$.
3) $P_B(A) = P(A)$.

Remarque

Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité de réalisation de l'autre.
Attention à ne pas confondre :

- Événements **incompatibles** : $A \cap B = \emptyset$, d'où $P(A \cap B) = 0$ (ils ne peuvent pas se produire en même temps).
- Événements **indépendants** : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (savoir que l'un est réalisé ne modifie pas la probabilité de l'autre).

E) Variables aléatoires

Définition : Variable aléatoire

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
On appelle **variable aléatoire réelle** toute fonction X définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Définition : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définir la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur possible $x_i \in X(\Omega)$ la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, notée $P(X = x_i)$.
On la présente généralement sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

avec $\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

Définition : Espérance mathématique

L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est le nombre réel défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \times P(X = x_i) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_k p_k$$

Interprétation

$E(X)$ représente la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X lorsque l'expérience est répétée un très grand nombre de fois. Dans le cadre d'un jeu, le jeu est dit **équitable** si $E(X) = 0$.

Définition : Variance et Écart-type

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par (x_i, p_i) et d'espérance $E(X)$.

— La **variance** de X, notée $V(X)$, est le nombre réel positif ou nul défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} \big(x_i - E(X)\big)^2 \times p_i$$

— L'**écart-type** de X, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de sa variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriété : Formule de König-Huygens

Pour le calcul de la variance, on utilise fréquemment :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \times p_i\right) - \big(E(X)\big)^2$$

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit la variable aléatoire X représentant le gain algébrique d'un joueur en euros :

- Si le résultat est 1 ou 2, le joueur perd 2 € ($X = -2$) ;
- Si le résultat est 3, le joueur gagne 3 € ($X = 3$) ;
- Si le résultat est 4 ou 5, le joueur gagne 5 € ($X = 5$) ;
- Si le résultat est 6, le joueur gagne 8 € ($X = 8$).

L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{-2; 3; 5; 8\}$.

1) Tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	-2	3	5	8
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2) Calculs de probabilités d'événements :

- $P(X = 3) = \dfrac{1}{6}$
- $P(X \leqslant 5) = P(X = -2) + P(X = 3) + P(X = 5) = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{6}$
- $P(X < 6) = P(X = -2) + P(X = 3) + P(X = 5) = \dfrac{5}{6}$

3) Espérance mathématique $E(X)$:

$$E(X) = (-2) \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{2}{6} + 8 \times \frac{1}{6} = \frac{-4 + 3 + 10 + 8}{6} = \frac{17}{6} \approx 2{,}83 \text{ €}$$

En moyenne, le joueur gagne environ 2,83 € par partie.

4) Variance $V(X)$ (par la formule de König-Huygens) :

$$E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{2}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{2}{6} + 8^2 \times \frac{1}{6} = \frac{8 + 9 + 50 + 64}{6} = \frac{131}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{131}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{786}{36} - \frac{289}{36} = \frac{497}{36} \approx 13{,}81$$

5) Écart-type $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{497}{36}} = \frac{\sqrt{497}}{6} \approx 3{,}72 \text{ €}$$