TERMINALE SPÉCIALITÉ — Lycée Yves Leborgne 2026 / 2027

Chapitre 3 : Suites numériques – Fiche d'exercices 2

Exercice 1 : Démontrer une formule explicite

Dans chaque cas, démontrer par récurrence que la formule proposée est vraie pour tout entier naturel n.

1.) (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$.
Montrer que $u_n = 3n + 2$.

2.) (v_n) est définie par $v_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$.
Montrer que $v_n = 5 \times 2^n$.

3.) (w_n) est définie par $w_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n - 3$.
Montrer que $w_n = 2^n + 3$.

Exercice 2 : Conjecturer puis démontrer

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1.) Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions.

2.) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

3.) Démontrer cette conjecture par récurrence.

4.) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 : Majorer une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0,5\, u_n + 2.$$

1.) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2.) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$.

3.) a.) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,5\,(4 - u_n)$.
b.) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 4 : Sommes

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

1.) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2.) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$;

3.) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 : Encadrement et sens de variation

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

On note f la fonction définie sur $[-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.) Calculer u_1 et u_2 (valeurs exactes).

2.) Justifier que la fonction f est croissante sur $[-2\,;\,+\infty[$.

3.) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

4.) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 6 : Divisibilité

1.) Calculer $4^n - 1$ pour $n = 0$, 1, 2 et 3. Que remarque-t-on ?

2.) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.
Indication : on pourra écrire $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4\,(4^n - 1) + 3$.

Exercice 7 : Une inégalité célèbre (inégalité de Bernoulli)

Soit a un réel positif.

1.) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

2.) Application : en prenant $a = 0,05$, montrer que $1,05^n \geqslant 1 + 0,05\,n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.) En déduire la limite de la suite $(1,05^n)$.