Mathématiques Terminale Spécialité
Devoir Surveillé

Exercice 1 (10 points)

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test *de fabrication* et un test *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95 % des jouets réussissent le test de fabrication ;
- Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité ;
- 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2. a. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.
   b. Montrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0{,}2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

Un jouet qui échoue à au moins un test ne peut pas être vendu en l'état, ce qui entraîne des frais pour l'entreprise. Pour gérer ces jouets, l'entreprise hésite entre deux options :

- **option 1** : s'en occuper elle-même (gestion interne) ;
- **option 2** : souscrire un contrat d'assurance.

L'objectif de cette partie est de déterminer l'option la moins coûteuse en moyenne.

1. Option 1 : gestion interne

Avec cette option, l'entreprise paie elle-même tous les frais :

- si le jouet réussit les deux tests, il est vendu et ne coûte rien : le coût est de 0 € ;
- si le jouet échoue à exactement un des deux tests, l'entreprise le répare : le coût est de 15 € ;
- si le jouet échoue aux deux tests, l'entreprise le détruit : le coût est de 50 €.

On note X la variable aléatoire qui, à un jouet choisi au hasard, associe le coût en euros payé par l'entreprise pour ce jouet avec l'option 1.

a. Justifier que la probabilité qu'un jouet échoue à exactement un des deux tests est égale à 0,059.

b. Déterminer la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

c. Calculer l'espérance $E(X)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

d. Calculer la variance $V(X)$ en arrondissant le résultat au centième.

2. Option 2 : contrat d'assurance

Avec cette option, les règles de l'option 1 ne s'appliquent plus. Le contrat fonctionne ainsi :

- pour chaque jouet produit, qu'il ait un défaut ou non, l'entreprise paie à l'assureur une somme fixe de m euros, appelée prime ($m > 0$) ;
- si le jouet réussit les deux tests, il est vendu et l'assureur ne verse rien ;
- si le jouet échoue à au moins un test (un seul ou les deux), il n'est pas réparé : il est retiré de la vente sans aucun frais pour l'entreprise, et l'assureur verse 50 € à l'entreprise.

On note Y la variable aléatoire qui, à un jouet choisi au hasard, associe le coût en euros pour l'entreprise avec l'option 2, c'est-à-dire la somme payée par l'entreprise diminuée de la somme reçue de l'assureur.

Remarque : un coût négatif signifie que l'entreprise reçoit plus d'argent qu'elle n'en paie pour ce jouet.

a. Quelles sont les deux valeurs possibles de Y ? On les exprimera en fonction de m.

b. Déterminer la loi de probabilité de Y sous la forme d'un tableau.

c. Démontrer que $E(Y) = m - 3{,}45$.

d. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le coût moyen par jouet est plus faible avec l'option 2 qu'avec l'option 1.

Exercice 2

(3 points)

Pour chacune des fonctions suivantes, dérivable sur l'intervalle I indiqué, calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = (3x + 4)\,\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3

(7 points)

Soit f la fonction polynôme définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $[-2\,;3]$.
2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;3]$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle (on précisera les valeurs exactes aux bornes).
3. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
   b. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. a. Vérifier que 1 est une racine de $f(x)$.
   b. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [-2\,;3]$:
   $$f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$
6. a. Étudier le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.
   b. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;3]$.