Correction : Loi binomiale

Exercices d'application et sujets de bac

Exercice 1 : Contrôle qualité sur une chaîne de production

1. On répète 20 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli où le succès est « obtenir un circuit défectueux » de probabilité 0,05. X comptabilise le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}05$.
2. L'événement « le lot ne contient aucun circuit défectueux » correspond à $X = 0$:
$$P(X = 0) = \binom{20}{0} \times 0{,}05^0 \times (1 - 0{,}05)^{20} = 0{,}95^{20} \approx 0{,}3585$$
3. En utilisant la formule de la loi binomiale :
$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \times 0{,}05^2 \times (1 - 0{,}05)^{18} = 190 \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^{18} \approx 0{,}1887$$
4. L'événement « le lot contient au plus deux circuits défectueux » correspond à $X \leq 2$.
À l'aide de la calculatrice :
$$P(X \leq 2) \approx 0{,}9245$$
5. X prenant des valeurs entières positives, l'événement $\{X < 3\}$ est équivalent à l'événement $\{X \leq 2\}$. Ainsi, sans calcul supplémentaire :
$$P(X < 3) = P(X \leq 2) \approx 0{,}9245$$
6. L'événement « le lot contient au moins un circuit défectueux » est l'événement contraire de $\{X = 0\}$:
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}95^{20} \approx 1 - 0{,}3585 = 0{,}6415$$
7. Comme $X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}05)$:
$$E(X) = n \times p = 20 \times 0{,}05 = 1$$
Interprétation : Sur un grand nombre de lots de 20 circuits prélevés, on compte en moyenne 1 circuit défectueux par lot.

Exercice 2 : Efficacité d'un traitement médical

1. On répète 10 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli où le succès est « le patient réagit favorablement au traitement » de probabilité 0,8. Y comptabilise le nombre de succès. Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}8$.
2. L'événement correspond à $Y = 10$:
$$P(Y = 10) = \binom{10}{10} \times 0{,}8^{10} \times 0{,}2^0 = 0{,}8^{10} \approx 0{,}1074$$
3. L'événement correspond à $Y = 8$:
$$P(Y = 8) = \binom{10}{8} \times 0{,}8^8 \times 0{,}2^2 = 45 \times 0{,}8^8 \times 0{,}04 \approx 0{,}3020$$
4. Y ne prenant que des valeurs entières, l'événement $\{Y > 7\}$ équivaut à $\{Y \geq 8\}$.
À l'aide de la calculatrice :
$$P(Y > 7) = P(Y \geq 8) \approx 0{,}6778$$

5. « Strictement moins de 6 réussites » correspond à $Y < 6$, soit $Y \leq 5$.
   À l'aide de la calculatrice :
   $$P(Y < 6) = P(Y \leq 5) \approx 0{,}0328$$

6. « Au moins la moitié des patients » correspond à $Y \geq 5$.
   À l'aide de la calculatrice :
   $$P(Y \geq 5) \approx 0{,}9936$$

7. $Y \sim \mathcal{B}(10\,;\,0{,}8)$ d'où :
   $$E(Y) = np = 10 \times 0{,}8 = 8$$
   $$V(Y) = np(1-p) = 10 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 1{,}6 \implies \sigma(Y) = \sqrt{1{,}6} \approx 1{,}26$$
   Interprétation : Si l'on administre ce traitement à plusieurs groupes de 10 patients, on observe en moyenne 8 guérisons (ou réactions favorables) par groupe de 10.

Exercice 3 : Lancers francs au basket

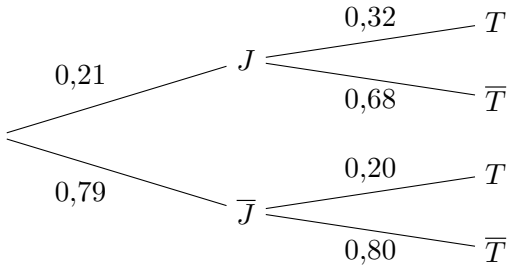
1. On répète 25 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli où le succès est « réussir son lancer franc » de probabilité 0,7. Z comptabilise le nombre de succès. Z suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0{,}7$.
2. $P(Z = 20) = \binom{25}{20} \times 0{,}7^{20} \times 0{,}3^5 \approx 0{,}1030$
   Interprétation : La probabilité que la joueuse réussisse exactement 20 lancers sur les 25 tentés est d'environ 10,30 %.
3. $P(15 \leq Z \leq 20) = P(Z \leq 20) - P(Z \leq 14) \approx 0{,}9095 - 0{,}0978 \approx 0{,}8117$
   Remarque : Ce résultat peut également être obtenu directement à l'aide de la calculatrice.
4. Si la joueuse manque au moins 5 lancers, cela signifie qu'elle en réussit au maximum $25 - 5 = 20$. Cet événement se traduit donc par $\{Z \leq 20\}$.
   À l'aide de la calculatrice :
   $$P(Z \leq 20) \approx 0{,}9095$$

5. $E(Z) = np = 25 \times 0{,}7 = 17{,}5$
   $V(Z) = 25 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 5{,}25 \implies \sigma(Z) = \sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29$
6. À la calculatrice, par lecture de la table des probabilités cumulées :
   $$P(Z \leq 19) \approx 0{,}8065 < 0{,}9 \quad \text{et} \quad P(Z \leq 20) \approx 0{,}9095 \geq 0{,}9$$
   Le plus petit entier cherché est donc $k = 20$.
   Interprétation : Lors d'une série de 25 lancers, il y a au moins 90 % de chances que la joueuse réussisse au plus 20 lancers.

Exercice 4 : D'après Baccalauréat Polynésie, 13 mars 2023

Partie A

1. D'après l'énoncé :
   - $P(J) = 0{,}21$ donc $P(\overline{J}) = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$;
   - $P_J(\overline{T}) = 0{,}68$ donc $P_J(T) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$;
   - $P_{\overline{J}}(T) = 0{,}20$ donc $P_{\overline{J}}(\overline{T}) = 0{,}80$.



On calcule la probabilité de l'événement $J \cap T$:

$$P(J \cap T) = P(J) \times P_J(T) = 0{,}21 \times 0{,}32 = 0{,}0672$$

2. J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(J \cap T) + P(\overline{J} \cap T) = 0{,}0672 + P(\overline{J}) \times P_{\overline{J}}(T) = 0{,}0672 + 0{,}79 \times 0{,}20 = 0{,}0672 + 0{,}158 = 0{,}2252$$

3. On cherche la probabilité conditionnelle $P_T(J)$:

$$P_T(J) = \frac{P(J \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0672}{0{,}2252} \approx 0{,}2984 \approx 0{,}30$$

La probabilité qu'un utilisateur professionnel ait moins de 35 ans est bien d'environ 0,30.

Partie B

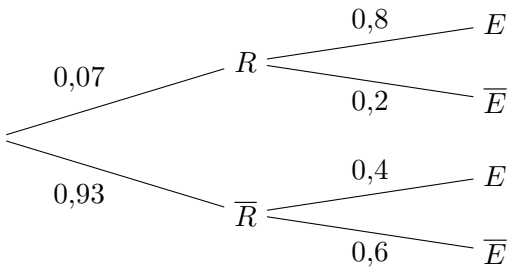
1. On répète 120 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli où le succès est « la personne a moins de 35 ans » de probabilité 0,30. X comptabilise le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0{,}30$.
2. On cherche $P(X \geq 50)$. À l'aide de la calculatrice :

$$P(X \geq 50) \approx 0{,}004$$

Exercice 5 : D'après Baccalauréat Amérique du Nord, 21 mai 2024

Partie A

1. Données de l'énoncé : $P(R) = 0{,}07$, $P(\overline{R}) = 0{,}93$, $P_R(E) = 0{,}8$ et $P_{\overline{R}}(E) = 0{,}4$.



On calcule $P(R \cap E)$:

$$P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$$

2. Les événements R et $\overline{R}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$P(E) = P(R \cap E) + P(\overline{R} \cap E) = 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}4 = 0{,}056 + 0{,}372 = 0{,}428$$

3. On cherche $P_E(R)$:

$$P_E(R) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}056}{0{,}428} = \frac{56}{428} = \frac{14}{107} \approx 0{,}131$$

Partie B

1. On répète 30 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli où le succès est « obtenir un objet rare » de probabilité 0,07. X comptabilise le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}07$.
   Son espérance mathématique est :

$$E(X) = n \times p = 30 \times 0{,}07 = 2{,}1$$

2. $P(X < 6) = P(X \leq 5)$.
   À l'aide de la calculatrice :

$$P(X \leq 5) \approx 0{,}984$$

3. On cherche la plus grande valeur de l'entier k vérifiant $P(X \geq k) \geq 0{,}5$. À l'aide de la calculatrice :
   - Pour $k = 2$: $P(X \geq 2) \approx 0{,}631 \geq 0{,}5$
   - Pour $k = 3$: $P(X \geq 3) \approx 0{,}351 < 0{,}5$

   La plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0{,}5$ est donc $k = 2$.
   Interprétation : 2 est le nombre maximal d'objets rares que le joueur peut espérer obtenir avec une probabilité d'au moins 50 %.