QCM – Géométrie dans l'espace — Sujet B
Corrigé

Réponses

— Q1 : D
— Q2 : B
— Q3 : A
— Q4 : D
— Q5 : A

Correction

1.

On considère un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d), de coordonnées

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

On a :

$$\vec{AB} = -\vec{u}.$$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Les droites (AB) et (d) sont donc strictement parallèles ou confondues.

On regarde si le point A appartient à (d) :

$$\begin{cases}1 = -1 - t\\1 = 1\\2 = 4 + t\end{cases} \iff \begin{cases}t = -2\\t = -2\end{cases}$$

Donc $A \in (d)$ et les droites (AB) et (d) sont confondues.

(D)

2.

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ont pour coordonnées respectives

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{AC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1.$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \qquad AC = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$1 = \sqrt{2} \times 1 \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\widehat{BAC} = 45°.$$

(B)

3.

On considère un vecteur normal $\vec{n}_0$ au plan (P), de coordonnées

$$\vec{n}_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) a pour coordonnées

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 2 = 0.$$

La droite (d) est donc parallèle au plan (P) ou contenue dans (P).
En prenant $t = 0$, on obtient le point $D(-1, 1, 4) \in (d)$.

$$2(-1) + 2(4) + 1 = -2 + 8 + 1 \neq 0.$$

Donc $D \notin (P)$ et (d) n'est pas contenue dans (P).
La droite (d) est strictement parallèle au plan (P).

(A)

4.

Un vecteur normal $\vec{n}_0$ au plan (P) a pour coordonnées

$$\vec{n}_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P') a pour coordonnées

$$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = 4 + 0 - 4 = 0.$$

Les plans (P) et (P') sont orthogonaux.

(D)

5.

On note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P).
Alors $H \in (P)$.

La droite (AH) est orthogonale au plan (P) et admet pour vecteur directeur $\vec{n}_0 \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AH) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Le point H vérifie l'équation du plan (P) :

$$2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) + 1 = 0.$$

$$2 + 4t + 4 + 4t + 1 = 0$$

$$7 + 8t = 0 \quad \iff \quad t = -\frac{7}{8}.$$

On obtient :

$$H\left(-\frac{3}{4},\, 1,\, \frac{1}{4}\right).$$

(A)