# QCM – Géométrie dans l'espace — Sujet C
# Corrigé

## Résumé des réponses

— Question 1 : B
— Question 2 : C
— Question 3 : C
— Question 4 : C
— Question 5 : B

## Question 1

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(d)$.

$\vec{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires car les coordonnées ne sont pas proportionnelles :

$$\frac{-1}{1} \neq \frac{-2}{-1}.$$

Les droites $(AB)$ et $(d)$ ne sont donc pas parallèles ni confondues. Voyons si elles sont sécantes.

Une représentation paramétrique de $(AB)$ est :

$$(AB) \ : \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 - 2k \\ z = 2 - k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Intersection de $(AB)$ et $(d)$. On cherche $(t, k) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} 2 + t = 1 - k \\ 3 - t = 1 - 2k \\ 3 + t = 2 - k \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 - k \\ 3 - (-1 - k) = 1 - 2k \\ 3 + (-1 - k) = 2 - k \end{cases}$$

Ce système conduit à une contradiction. Donc $(AB)$ et $(d)$ ne sont pas sécantes.

Les droites $(AB)$ et $(d)$ sont donc non coplanaires.

## Question 2

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3.$$

On a

$$AB = \sqrt{6} \qquad AC = \sqrt{2}.$$

Donc

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Ainsi

$$-3 = \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \cos \widehat{BAC}.$$

D'où

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{-3}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\widehat{BAC} = \text{Arcos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ.$$

## Question 3

$$\vec{n}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal au plan $(P)$.

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 - 1 = 0.$$

La droite $(d)$ est donc parallèle ou contenue dans $(P)$.
Pour $t = 0$, on a $D(2, 3, 3) \in (d)$. Or

$$2 - 3 + 1 = 0,$$

donc $D \in (P)$.

La droite $(d)$ est contenue dans le plan $(P)$.

## Question 4

$$\vec{n}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a

$$\vec{n} = 2\vec{n}_0.$$

Les plans $(P)$ et $(P')$ sont donc parallèles ou confondus.
Or $A(1,1,2) \in (P)$ car

$$1 - 2 + 1 = 0.$$

Les plans $(P)$ et $(P')$ sont confondus.

## Question 5

Représentation paramétrique de la droite passant par $C$ et orthogonale à $(P)$ :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On note $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur $(P)$. Alors $H \in (P)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$(2 + 2t) - (2 - 2t) + 1 = 0.$$

Ainsi

$$4t + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{1}{4}.$$

Donc

$$\begin{cases} x_H = 2 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \\ y_H = 2 \\ z_H = 2 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

On obtient

$$H\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right).$$