Fiche d'exercices — Variables aléatoires

Exercice 1 — Construction d'une somme de variables aléatoires

On lance simultanément deux dés indépendants :
— un dé tétraédrique équilibré numéroté de 1 à 4 ;
— un dé classique équilibré numéroté de 1 à 6.
On fait ensuite la somme des deux nombres obtenus.
On note :

$$X = \text{résultat du dé tétraédrique}, \qquad Y = \text{résultat du dé classique}, \qquad Z = X + Y.$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

2. Déterminer la loi de probabilité de Y.
Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

3. Les valeurs possibles de Z peuvent être obtenues à l'aide de la table d'addition suivante :

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Déterminer la loi de probabilité de Z.

4. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$ à partir de la loi de Z.

5. Vérifier que :

$$E(Z) = E(X) + E(Y)$$
$$V(Z) = V(X) + V(Y)$$

Exercice 2 — Loi binomiale et transformation d'une variable aléatoire

Lors d'un match, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points.
On suppose que :
— chaque lancer est indépendant des autres ;
— la probabilité que Victor réussisse un lancer à trois points est égale à $0,32$.
On note T la variable aléatoire donnant le nombre de paniers à trois points marqués par Victor au cours de cette série de 15 lancers.

1. Justifier que T suit une loi binomiale, puis préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que Victor réussisse au moins 10 paniers au cours de cette série.

3. Calculer $E(T)$ et $V(T)$.

Chaque panier marqué rapportant 3 points, on note désormais N la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor grâce à ses tirs à trois points au cours de cette série.

4. Exprimer N en fonction de T.

5. En déduire $E(N)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

6. Calculer $V(N)$ puis $\sigma(N)$.

Exercice 3 — Variables non indépendantes

Un candidat participe à un jeu télévisé en deux parties.

Lors de la première partie, il peut gagner 1 point. Lors de la seconde partie, il peut gagner 2 points.

On considère que la probabilité de réussir la première partie est égale à $0,7$.

Si le candidat réussit la première partie, la probabilité de réussir la seconde est égale à $0,8$.

Si le candidat échoue à la première partie, la probabilité de réussir la seconde est égale à $0,3$.

On note A l'événement : « le candidat réussit la première partie ».

On note B l'événement : « le candidat réussit la seconde partie ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer $P(A \cap B)$ puis $P(B)$.

3. Le candidat a échoué à la seconde partie. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi la première partie ?

On définit ensuite les variables aléatoires :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la première partie est réussie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 2 & \text{si la seconde partie est réussie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $S = X + Y$ le nombre total de points obtenus.

4. Déterminer la loi de X et la loi de Y.

5. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. En déduire $E(S)$.

6. Déterminer la loi de probabilité de S.

7. Calculer $V(S)$.

8. Comparer $V(S)$ et $V(X) + V(Y)$. Ce résultat est-il surprenant ?

Exercice 4

Sur une journée, le nombre d'erreurs commises dans un processus industriel est modélisé par une variable aléatoire X telle que :

$$E(X) = 10 \quad \text{et} \quad V(X) = 4.$$

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$P(|X - 10| \geq 4) \leq 0,25.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte.

Exercice 5

On considère une variable aléatoire Y telle que :

$$E(Y) = 20 \quad \text{et} \quad V(Y) = 9.$$

Montrer que :

$$P(14 < Y < 26) \geq \frac{3}{4}.$$

Exercice 6

On considère une variable aléatoire Z telle que :

$$E(Z) = 50 \quad \text{et} \quad V(Z) = 25.$$

Montrer que :

$$P(40 < Z < 60) \geq 0,75.$$