EXERCICE 3 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. On considère les points A$(-1 ; 0 ; 5)$ et B$(3 ; 2 ; -1)$.

   Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

   $$\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2-t \\ z = -1+3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

   Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

   - la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15+k \\ y = 8-k \\ z = -6+2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
   - la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+4s \\ y = 2+4s \\ z = 1-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

   Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+z+1=0$.

   Affirmation 4 : La distance du point C$(2 ; -1 ; 2)$ au plan $\mathscr{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

EXERCICE 2 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$. On considère :

- les points A$(-1\,;\,2\,;\,1)$, B$(1\,;\,-1\,;\,2)$ et C$(1\,;\,1\,;\,1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d:\begin{cases} x &= \frac{3}{2}+2t \\ y &= 2+t \\ z &= 3-t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d:\begin{cases} x &= s \\ y &= \frac{3}{2}+s \\ z &= 3-2s \end{cases} \quad \text{avec } s\in\mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point S$\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right)$.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x+2y+4z-7=0.$$

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

4. **a.** Démontrer que le point H$(-1\,;\,0\,;\,2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.

2. Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?