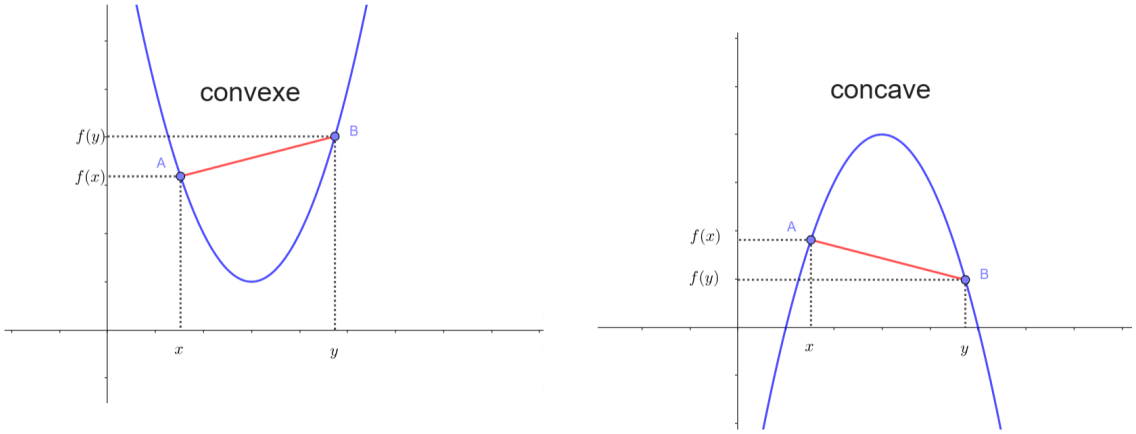
4) Convexité

a) Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.

Définition

Soient x et y deux réels de I avec $x < y$.
La droite passant par les points $A(x; f(x))$ et $B(y; f(y))$ est appelée **sécante** à la courbe C_f sur $[x; y]$.



Définition

On dit que la fonction f est :

- **convexe** sur I si sa courbe C_f est située **au-dessous de toutes ses sécantes :**

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

- **concave** sur I si sa courbe C_f est située **au-dessus de toutes ses sécantes :**

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

b) Lien avec la dérivée seconde

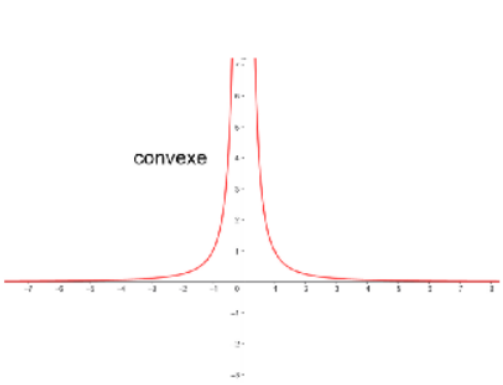
Propriété

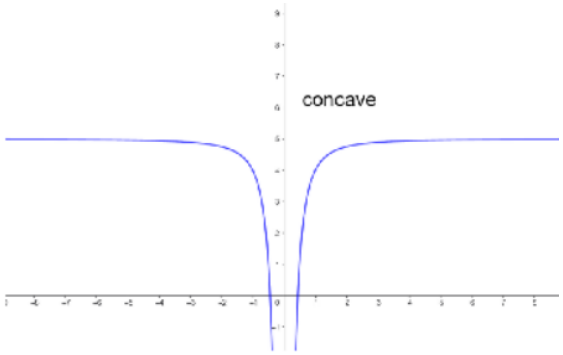
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si $f''(x) \geq 0$ sur I, alors f est **convexe** sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ sur I, alors f est **concave** sur I.

Propriété

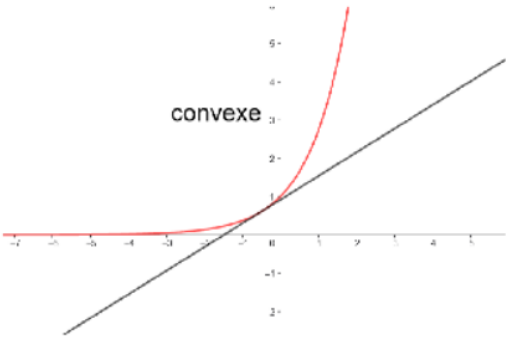
Conséquence
Si f est convexe sur un intervalle I, alors f' est croissante sur I.
Si f est concave sur un intervalle I, alors f' est décroissante sur I.
Ainsi, pour une fonction convexe, la pente des tangentes augmente. Pour une fonction concave, la pente des tangentes diminue.

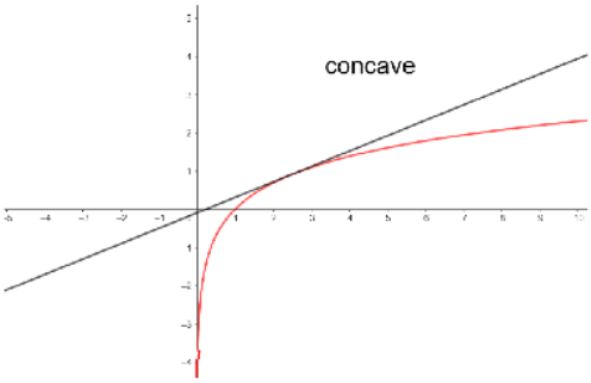




Si f est **convexe**, elle croît de plus en plus vite ou décroît de moins en moins vite.
Si f est **concave**, elle croît de moins en moins vite ou décroît de plus en plus vite.

c) Tangente et convexité





Propriété

Si f est convexe sur un intervalle I, alors sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes.
Autrement dit :

$$\forall a \in I, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

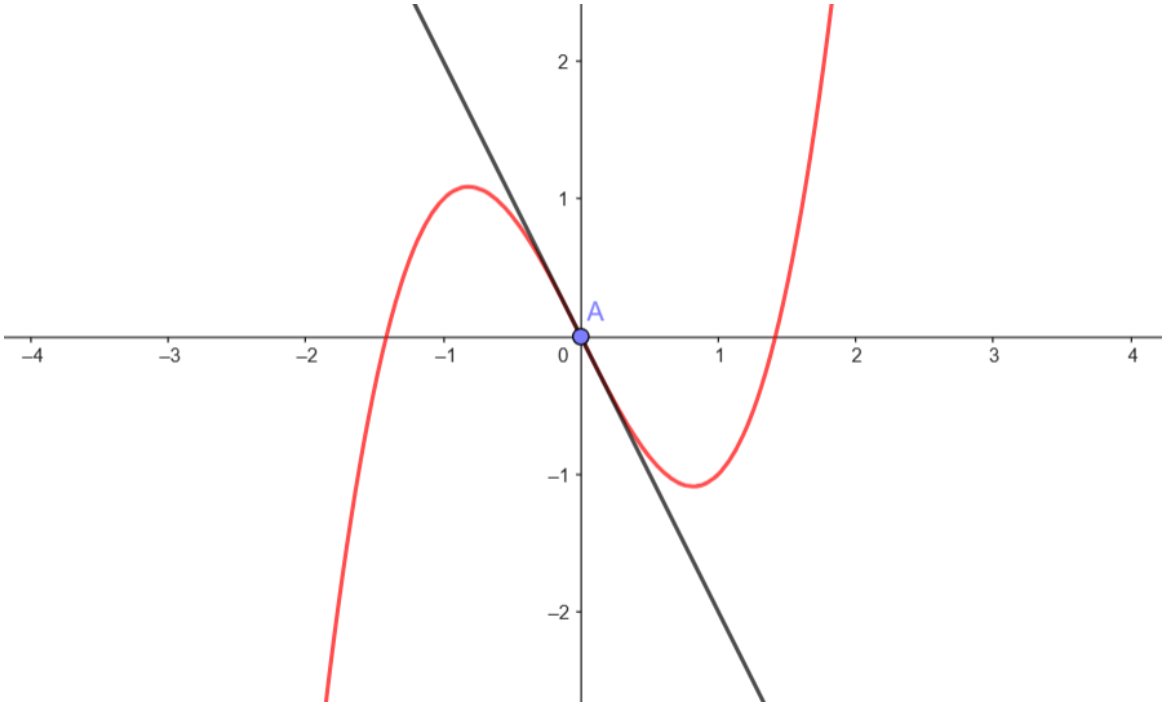
Si f est concave sur un intervalle I, alors sa courbe est située au-dessous de toutes ses tangentes.
Autrement dit :

$$\forall a \in I, \quad f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a).$$

d) Résumé

	Convexe	Concave
Sécantes	Courbe au-dessous des sécantes	Courbe au-dessus des sécantes
Dérivée seconde	$f''(x) \geq 0$	$f''(x) \leq 0$
Dérivée	f' croissante	f' décroissante
Tangentes	Courbe au-dessus de ses tangentes	Courbe au-dessous de ses tangentes

e) Point d'inflexion



Propriété

Si f'' s'annule et change de signe en a, alors le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion**.

f) Exemples classiques

Propriété

- La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$.