3. Avec $f(x) = (x+K)\mathrm{e}^{-x}$ et $f(0) = 2$, on a : $(0+K)\mathrm{e}^{-0} = 2 \iff K = 2$.
Conclusion : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie 3

1. **a.** Puisque f est solution de l'équation différentielle (E) ; on a donc
$f'(x) = -f(x) + \mathrm{e}^{-x} = -(x+2)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(-x-2+1) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$. Donc :
$-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$;
$-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$;
$-x-1 = 0 \iff -1 = x$.
La fonction est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$, décroissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et a donc un maximum $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = \mathrm{e}$.

2. **a.** De $f'(x) = -f(x) + \mathrm{e}^{-x}$, on obtient en dérivant :
$f''(x) = -f'(x) - \mathrm{e}^{-x} = -(-x-1)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x}$.

b. D'après le résultat précédent sur $[0\ ;\ +\infty[$, $x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le produit $x\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$: la dérivée seconde est positive, la fonction f est convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

EXERCICE B

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1. **a.** Sur l'intervalle $[1\,;4]$, $f'(x) = -30 + \dfrac{35}{x} = \dfrac{-30x+35}{x} = \dfrac{35-30x}{x}$.

b. Puisque $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $35-30x = 5(7-6x)$ donc du facteur $7-6x$.
$7-6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \dfrac{7}{6} > x \iff x < \dfrac{7}{6}$;
$7-6x < 0 \iff 7 < 6x \iff \dfrac{7}{6} <> x \iff x > \dfrac{7}{6}$;
$7-6x = 0 \iff 7 = 6x \iff \dfrac{7}{6} = x \iff x = \dfrac{7}{6}$.

c. La fonction f est donc croissante sur $\left[1\ ;\ \dfrac{7}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$ et a donc un maximum : $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = -30 \times \dfrac{7}{6} + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = -35 + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$.

2. f décroit sur $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$ de $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$ à $f(4) = -120 + 50 + 35\ln 4 = 35\ln 4 - 70 \approx -21,5$.

x	1		$\frac{7}{6}$		α		4
f	20	↗	$\approx 20,4$	↘	0	↘	$\approx -21,4$

Sur l'intervalle $\left[\frac{7}{6}\,;\,4\right]$, f est continue et strictement décroissante.

Comme $0 \in \left[f\left(\frac{7}{6}\right)\,;\,f(4)\right]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.

- On a $f(2) \approx 14,26$ et $f(3) \approx -1,54$, donc $2 < \alpha < 3$;
- On a $f(2,9) \approx 0,26$ et $f(3,0) \approx -1,54$, donc $2,9 < \alpha < 3,0$;
- On a $f(2,91) \approx 0,09$ et $f(2,92) \approx -0,09$, donc $2,91 < \alpha < 2,92$;
- On a $f(2,914) \approx 0,0013$ et $f(2,915) \approx -0,005$, donc $2,914 < \alpha < 2,915$.

3. On a donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,\alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,4]$.

Partie 2 : Optimisation

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. 2 500 litres correspondent à $x = 2,5$ et $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln 2,5 \approx 23,925\,4$ soit environ 23 925 €.

2. La fonction B est dérivable sur $[1\,;4]$ et sur cet intervalle :

$B'(x) = -30x + 15 + 35\ln x + 35x \times \dfrac{1}{x} = 50 - 30x + 35\ln x = f(x)$.

3. **a.** D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,\alpha]$: la fonction B est donc croissante sur $[1\,;\,\alpha]$.

De même $f(x) = B'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,4]$: la fonction B est donc décroissante sur $[1\,;\,\alpha]$.

Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.

b. $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha\ln\alpha$.

En utilisant la valeur approchée de α trouvée dans la partie 1, on a :

$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201$, soit environ 25 420 € à l'euro près.

Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéficie maximal.