Corrigé du baccalauréat Centres étrangers [1] 21 mars 2023

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(x^2\right) + x - 2$$

1. • On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = 2\ln x + x - 2$, d'où :

$g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 1$. On a par composition de la dérivation :

$g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{2+x}{x}$.

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $2 + x$.

Or $x > 0 \implies 2 + x > 2 > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

La fonction g est donc croissante et d'après la question précédente de moins l'infini à plus l'infini.

3. **a.** D'après la question précédente g est continue car dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et croit de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne :

$g(1) = -1$ et $g(2) \approx 1,4$, donc $1 < \alpha < 2$;

$g(1,3) \approx -0,175$ et $g(1,4) \approx 0,07$, donc $1,3 < \alpha < 1,4$;

$g(1,37) \approx -0,0004$ et $g(1,38) \approx 0,02$, donc $1,37 < \alpha < 1,38$

4. D'où le tableau de signe :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x)$$

1. **a.** On a successivement :

$\lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, d'où par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-2)}{x} = -\infty$;

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

1. Europe

b. Géométriquement le résultat précédent montre que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. • On a $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x} = 1-\frac{2}{x}$

De $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, il suit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x} = 1$.

• D'autre part on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Donc par produit de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a par dérivation du produit :

$$f'(x) = \frac{1\times x - 1\times(x-2)}{x^2}\ln x + \frac{x-2}{x}\times\frac{1}{x} = \frac{x-x+2}{x^2}\ln x + \frac{x-2}{x^2} = \frac{2\ln x + x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

4. Comme $x^2 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle est celui de $g(x)$.

On a vu à la question A. 4. que :

- :sur l'intervalle $]0\,;\,\alpha[$, $g(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]0\,;\,\alpha[$;
- :sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $]\alpha\,;\,\infty[$.

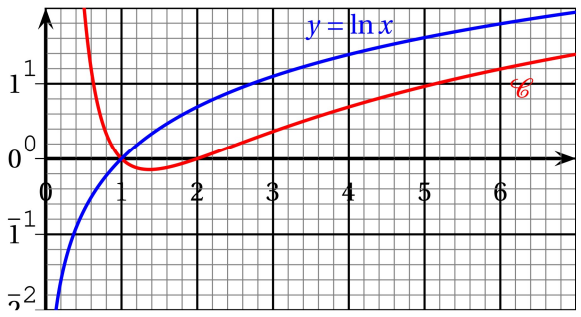
Partie C

$$d(x) = f(x) - \ln x = \frac{(x-2)}{x}\ln(x) - \ln x = \ln x\left[\frac{(x-2)}{x} - 1\right] = \ln x\left[\frac{x-2-x}{x}\right] = \frac{-2}{x}\ln x.$$

La position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln est donnée par le signe de la fonction d.
Comme $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui du produit $-2\ln x$.
On dresse donc un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
-2	‖	$-$		$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$-2\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe logarithme népérien et, sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la courbe logarithme népérien.



EXERCICE 2 — 5 points

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :