Correction du DS 7

Exercice 1

Affirmation 1

On note d la droite donnée par la représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Un vecteur directeur de d est

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les points $A(-2;1;4)$ et $B(1;3;0)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 3-1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On compare les rapports des coordonnées :

$$\frac{3}{3} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

Ces rapports ne sont pas égaux ; les coordonnées ne sont donc pas proportionnelles, ainsi $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.
Donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite (AB), et la droite d ne peut pas être la droite (AB).

Conclusion : affirmation fausse.

Affirmation 2

Le plan (OAB) contient notamment le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (OAB), alors il est orthogonal à tout vecteur du plan, en particulier à $\overrightarrow{AB}$.
On calcule donc le produit scalaire :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \times 3 + (-3) \times 2 + (-1) \times (-4) = 12 - 6 + 4 = 10.$$

Ce produit scalaire n'est pas nul, donc $\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
Ainsi $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal au plan (OAB).

Conclusion : affirmation fausse.

Affirmation 3

Les vecteurs directeurs sont :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } d \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{pour } d'.$$

On compare les rapports des coordonnées :

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}.$$

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les droites d et d' ne sont ni parallèles ni confondues.

Pour savoir si elles sont sécantes, on cherche s'il existe $(k, s) \in \mathbb{R}^2$ tel que les deux paramétrisations donnent le même point :

$$\begin{cases} 2 + k = 1 + 2s & (L_1) \\ -1 + 2k = 3 + s & (L_2) \\ 3 - k = -2 + 3s & (L_3) \end{cases}$$

À partir de (L_1) :

$$k = -1 + 2s.$$

On remplace dans (L_2) :

$$-1 + 2(-1 + 2s) = 3 + s \quad \Longrightarrow \quad -3 + 4s = 3 + s \quad \Longrightarrow \quad 3s = 6 \quad \Longrightarrow \quad s = 2.$$

Donc

$$k = -1 + 2 \times 2 = 3.$$

On remplace dans (L_3) :

$$3 - k = -2 + 3s \quad \Longleftrightarrow \quad 3 - 3 = -2 + 3 \times 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = 4,$$

ce qui est impossible.

Il n'existe donc pas de solution (k, s) : les droites ne sont pas sécantes. Comme elles ne sont pas parallèles, elles ne sont pas coplanaires.

Conclusion : affirmation vraie.

Affirmation 4

Le plan P a pour équation $2x - y + 2z - 3 = 0$, donc un vecteur normal est

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On considère le point $C(1; -1; 2)$ et la droite Δ passant par C et de vecteur directeur $\vec{n}$:

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Soit H le point d'intersection de Δ avec le plan P. Ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$2(1 + 2t) - (-1 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0.$$

On simplifie :

$$2 + 4t + 1 + t + 4 + 4t - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 + 9t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = -\frac{4}{9}.$$

Ainsi

$$H\left(1 + 2\left(-\frac{4}{9}\right) \ ; \ -1 - \left(-\frac{4}{9}\right) \ ; \ 2 + 2\left(-\frac{4}{9}\right)\right) = H\left(\frac{1}{9} \ ; \ -\frac{5}{9} \ ; \ \frac{10}{9}\right).$$

La distance du point C au plan P est alors CH :

$$CH = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 + \left(-1 + \frac{5}{9}\right)^2 + \left(2 - \frac{10}{9}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64 + 16 + 64}{81}} = \sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{4}{3}.$$

Conclusion : la distance n'est pas $\dfrac{2}{3}$; affirmation fausse.

Affirmation 5

On considère $A(-2;1;4)$, $B(1;3;0)$ et $C(1;-1;2)$.

1) Produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-1\\0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-(-2)\\-1-1\\2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times 3+2\times(-2)+(-4)\times(-2)=9-4+8=13.$$

2) Longueurs

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{3^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{29},\qquad AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{17}.$$

3) Relation produit scalaire / cosinus

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}),$$

d'où

$$\cos(\widehat{BAC})=\frac{13}{\sqrt{29}\sqrt{17}}.$$

Ainsi

$$\widehat{BAC}=\arccos\left(\frac{13}{\sqrt{29}\sqrt{17}}\right)\approx 54^\circ \text{ (au degré près)}.$$

Conclusion : affirmation vraie.