Mathématiques – Terminale spécialité

Devoir surveillé – Vendredi 27 fevrier

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. On considère les points $A(-2\,;\,1\,;\,4)$ et $B(1\,;\,3\,;\,0)$.

   Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

   $$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :
   — la droite d de représentation paramétrique

   $$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = 3 - k \end{cases} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R};$$

   — la droite d' de représentation paramétrique

   $$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 3 + s \\ z = -2 + 3s \end{cases} \qquad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

   Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation

   $$2x - y + 2z - 3 = 0$$

   et le point $C(1\,;\,-1\,;\,2)$.

   Affirmation 4 : La distance du point C au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\dfrac{2}{3}$.

   Affirmation 5 : La mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près est $54°$.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x^2) + x - 2.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. a) Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif a tel que $g(a) = 0$.
   b) Déterminer un encadrement de a d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x}\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b) Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.