Terminale spé maths
DS7 rattrapage

Exercice 1:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère :

- α un réel quelconque ;
- les points A(1 ; 1 ; 0), B(2 ; 1 ; 0) et C(α ; 3 ; α) ;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \quad 2t \\ z = \quad -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.
Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α, les points A, B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.
Affirmation 3 : Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est 135°.
Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H(1 ; 2 ; 2).
Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.
On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω.

Exercice 2

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35\ln x.$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que :
   $$f'(x) = \frac{35-30x}{x}.$$
   b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.
   c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.
   On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.
2. Pour tout x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
3. a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.
   b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.