Chapitre VIII — Équations différentielles

1. Définition d'une équation différentielle

Définition.
Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction y dérivable sur un intervalle I, et qui fait intervenir cette fonction y ainsi que sa dérivée y' (et éventuellement ses dérivées successives).

Résoudre une équation différentielle sur I, c'est déterminer toutes les fonctions y dérivables sur I qui vérifient l'équation.

Exemples.

- $y' = 2x$: on cherche les fonctions dont la dérivée est $2x$.
- $y' = 3y$: on cherche les fonctions égales au tiers de leur dérivée.
- $y' = -2y + \cos(x)$: combine les deux types précédents.

Remarque. Une équation différentielle admet en général une infinité de solutions. Pour en sélectionner une seule, on impose une *condition initiale*, c'est-à-dire la valeur $y(x_0)$ prise par la solution en un point x_0 donné.

2. Équations du type $y' = f$

Propriété.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Les solutions sur I de l'équation différentielle

$$y' = f(x)$$

sont les primitives de f sur I. Elles sont de la forme

$$y(x) = F(x) + C$$

où F est une primitive de f sur I et $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = 3x^2 - 4$.

Les solutions sont les primitives de $x \mapsto 3x^2 - 4$, c'est-à-dire les fonctions

$$y(x) = x^3 - 4x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple avec condition initiale. Résoudre $y' = 3x^2 - 4$ avec $y(0) = 5$.

Les solutions générales sont $y(x) = x^3 - 4x + C$. La condition $y(0) = 5$ donne $C = 5$, donc l'unique solution est $y(x) = x^3 - 4x + 5$.

3. Équations du type $y' = ay$

Théorème.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = ay$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C\,e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De plus, pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Démonstration (que $y(x) = C\,e^{ax}$ est bien solution).

Soit $y(x) = C\,e^{ax}$. Alors $y'(x) = C \cdot a \cdot e^{ax} = a \cdot C\,e^{ax} = a\,y(x)$. Donc y est bien solution.

La réciproque (toute solution est de cette forme) est admise.

Exemple. Résoudre $y' = -2y$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 3$.

Les solutions générales sont $y(x) = C\,e^{-2x}$. La condition $y(0) = 3$ donne $C = 3$, donc $y(x) = 3\,e^{-2x}$.

4. Équations du type $y' = ay + f$

Théorème.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = ay + f(x).$$

Si y_0 est une solution particulière de (E), alors les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme

$$y(x) = y_0(x) + C\,e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

Soit y_0 une solution particulière de (E). On a donc :

$$y_0'(x) = a\,y_0(x) + f(x). \quad (1)$$

Soit y une autre solution quelconque de (E). On a alors :

$$y'(x) = a\,y(x) + f(x). \quad (2)$$

En faisant la différence $(2) - (1)$, on obtient :

$$y'(x) - y_0'(x) = a\,y(x) - a\,y_0(x),$$

soit

$$\big(y - y_0\big)'(x) = a\,\big(y - y_0\big)(x).$$

Ainsi, la fonction $y - y_0$ est solution de l'équation $z' = az$ étudiée au paragraphe précédent. Il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$y(x) - y_0(x) = C\,e^{ax},$$

c'est-à-dire

$$y(x) = y_0(x) + C\,e^{ax}.$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien solution de (E) (vérification directe en dérivant).

Méthode. Pour résoudre $y' = ay + f(x)$:

- on cherche une solution particulière y_0 de (E) (par essai, ou donnée par l'énoncé) ;
- on écrit la solution générale sous la forme $y = y_0 + C\,e^{ax}$.

5. Cas particulier : $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Théorème.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x) = -\frac{b}{a} + C\,e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

On cherche une solution particulière constante $y_0(x) = k$. Alors $y_0'(x) = 0$ et l'équation devient :

$$0 = a\,k + b, \quad \text{d'où} \quad k = -\frac{b}{a}.$$

La fonction constante $y_0(x) = -\dfrac{b}{a}$ est donc une solution particulière de l'équation. D'après le théorème du paragraphe 4, les solutions sont :

$$y(x) = -\frac{b}{a} + C\,e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Résoudre $y' = 2y - 6$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.

Ici $a = 2$ et $b = -6$, donc $-\dfrac{b}{a} = 3$. Les solutions générales sont :

$$y(x) = 3 + C\,e^{2x}.$$

La condition $y(0) = 1$ donne $1 = 3 + C$, soit $C = -2$. La solution est :

$$y(x) = 3 - 2\,e^{2x}.$$

Remarque. Si $a = 0$, l'équation se réduit à $y' = b$, qui relève du paragraphe 2 : les solutions sont $y(x) = bx + C$.