EXERCICE 1 — 5 points

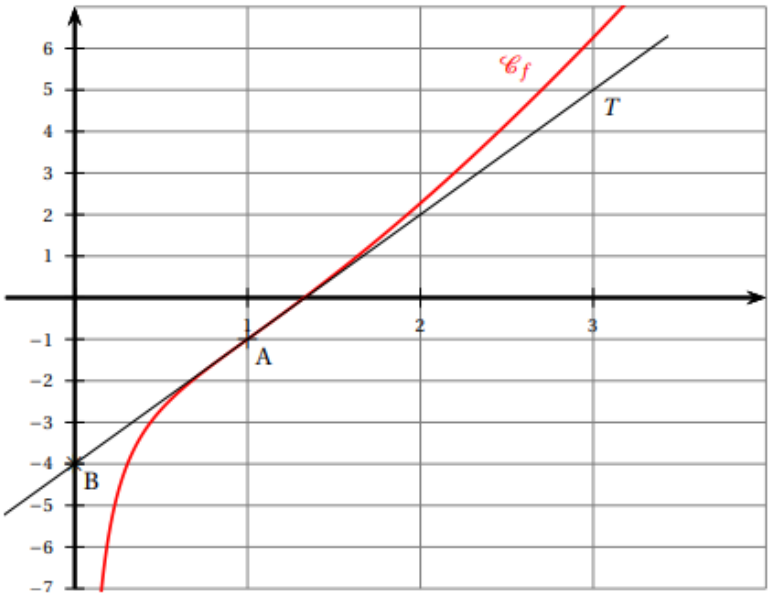
D'après Amérique du Nord — sujet 1 — *21 mai 2024*

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1;-1)$.
Cette tangente passe également par le point $B(0;-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,
   $$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$
3. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

(b) Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

EXERCICE 2 — 5,5 points

D'après Asie — sujet 2 — *11 juin 2024*

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0;+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

EXERCICE 3 — 6 points

D'après Métropole — sujet 1 — *19 juin 2024*

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2x}.$$

   (c) Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
   (d) Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique que l'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1; 2]$.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.
   (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0;1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0;1]$, puis vérifier que

$$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. (a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $]0;\frac{1}{\alpha}[$, on a

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > 0.$$

(b) On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\dfrac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0;1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.