Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$.
4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
   On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2		$m \approx 2{,}364$		6,5
$h(x)$	$h(2)$	↗	$M \approx 2{,}265$	↘	$h(6{,}5)$

   Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\,;6{,}5]$.
5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande log(x) renvoie la valeur $\ln x$;
- la commande c**d renvoie la valeur de c^d.

a. Donner les valeurs renvoyées par la commande bornes(2).
On donnera les valeurs arrondies au centième.

b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6{,}5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$.
   Justifier que $\ell = \alpha$.