Chapitre VI : Intégration

1) Intégrale d'une fonction continue positive

Définition

On se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle **unité d'aire**, notée **u.a.**, l'aire du rectangle ayant pour côtés les longueurs $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

$$1 \text{ u.a.} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

Exemple : si $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm, alors

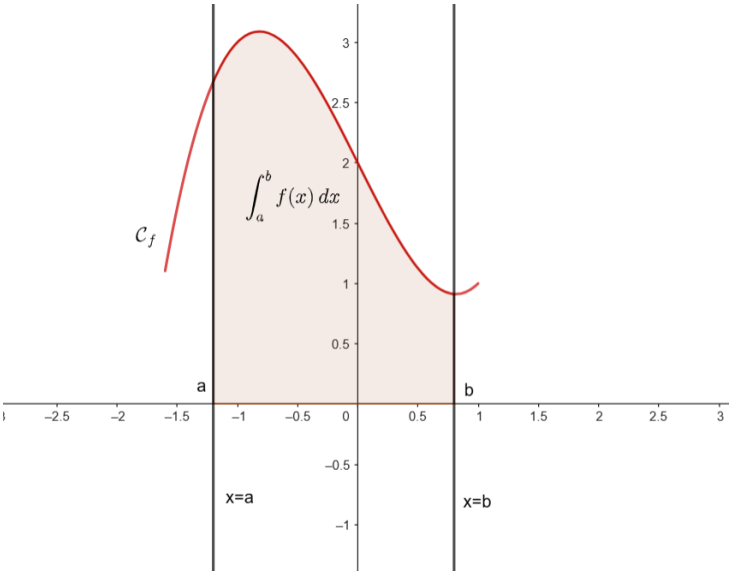
$$1 \text{ u.a.} = 6 \text{ cm}^2$$

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
On appelle **intégrale de f sur** $[a; b]$, notée

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

le nombre égal à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



2) Intégrale d'une fonction continue

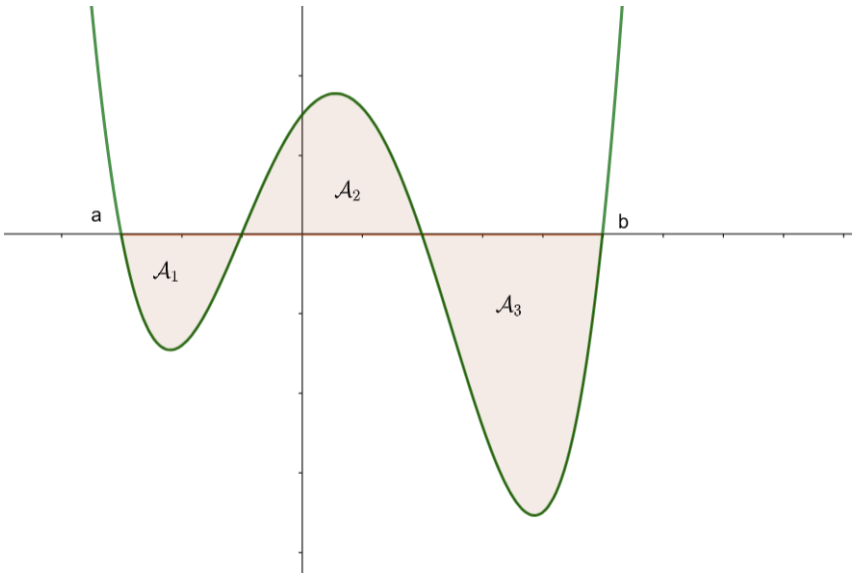
Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
On appelle **intégrale de f sur** $[a;b]$, notée

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

le nombre égal à l'aire des parties du domaine situées au-dessus de l'axe des abscisses moins l'aire des parties situées en dessous de cet axe.

Exemple :



$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_3$$

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Pour tout réel c :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3) Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Remarque : si f est continue sur un intervalle I et si $a \in I$, alors la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur I.

Propriété

Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors il existe un réel λ tel que :

$$G(x) = F(x) + \lambda$$

pour tout $x \in I$.

Démonstration

Soit F et G deux primitives de f sur un intervalle I.
On a alors :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad G'(x) = f(x)$$

Donc :

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$$

La fonction $G - F$ est donc constante sur I.
Il existe donc un réel λ tel que :

$$G(x) = F(x) + \lambda$$

Propriété

Les fonctions suivantes admettent des primitives sur leur domaine :

$f(x)$	Une primitive $F(x)$	Domaine
a	ax	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
Cas avec composition		
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln \lvert u(x) \rvert$	$u(x) \neq 0$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\,u(x)^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u(x)$ défini

4) Calcul d'une intégrale

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Pour tous réels a et b appartenant à I :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$.

Une primitive de $f(x) = x^2$ est $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

5) Linéarité et positivité de l'integrale

Propriété : linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

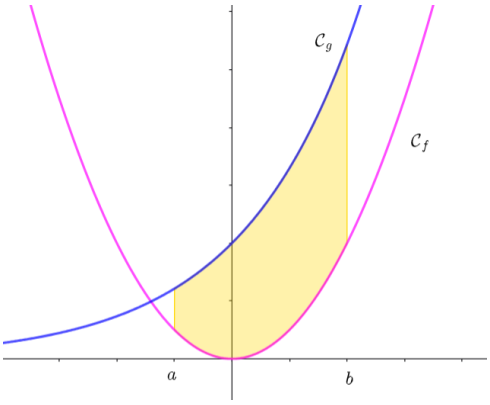
Propriété : positivité

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.
Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$



Conséquence : aire entre deux courbes

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de f et g, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, est donnée par

$$\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,dx.$$

6) Intégration par parties

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b appartenant à I :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$.
On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.
Alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

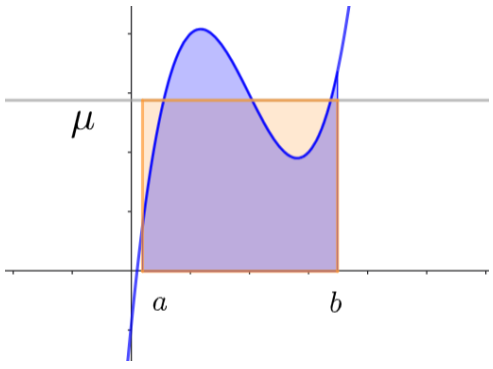
$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = 1$$

7) Valeur moyenne

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Interprétation

La valeur moyenne μ correspond à la hauteur d'un rectangle de base $b-a$ ayant la même aire que la surface sous la courbe de f sur $[a;b]$.