Chapitre 5 – Fonction logarithme népérien et convexité

1) Fonction logarithme népérien

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Son intervalle image est $]0, +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $x > 0$, il existe un unique réel $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^t = x$.

Définition

On appelle **logarithme népérien de** x l'unique réel t vérifiant

$$e^t = x.$$

On note ce réel $\ln(x)$.

On définit donc la **fonction logarithme népérien** :

$$\ln : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{cases}$$

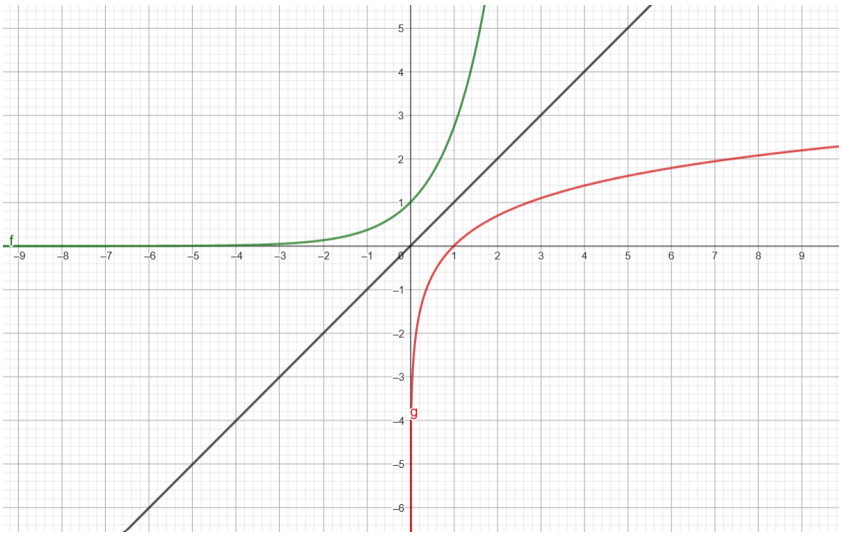
Propriété

La fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

$$\forall x > 0, \quad e^{\ln(x)} = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

Représentation graphique

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
La courbe représentative de la fonction ln est donc la symétrique de celle de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété

$$\ln(1) = 0$$

$$\forall x \in]0,1[, \quad \ln(x) < 0$$

$$\forall x > 1, \quad \ln(x) > 0$$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Propriété

Soient a et b deux réels positifs.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

$$\ln(a^b) = b\ln(a)$$

Propriété

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et :

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

2) Compléments sur les limites

Propriété

Limites utiles

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

3) Puissances réelles

Définition

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
On définit la puissance réelle a^b par :

$$a^b = e^{b\ln(a)}.$$

Propriété

Pour tout $a > 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Remarque. Les règles de calcul habituelles sur les puissances entières se prolongent aux puissances réelles.