EXERCICE 1 — Amérique du Nord 2025

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

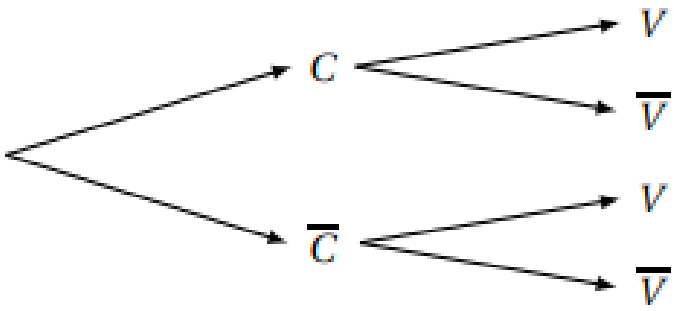
Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2 % de la population d'un pays. Dans ce pays, 90 % de la population a été vaccinée contre ce virus. On constate que 62 % des personnes contaminées avaient été vaccinées.

On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :

C : « la personne a été contaminée », V : « la personne a été vaccinée ».

Les évènements contraires des évènements C et V sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.
2. (a) Calculer $P(C \cap V)$.
   (b) En déduire $P(C \cap \overline{V})$.
3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.
   (a) « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »
   (b) « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »
6. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population. La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de personnes contaminées. On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0{,}02$.
   (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.
   (b) Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

EXERCICE 2 — Asie 2024

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID-19.
Source : https ://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID-19 ».
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID-19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   (a) Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   (c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait **aucune** personne infectée dans l'échantillon ?
   (On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.)
   (d) Quelle est la probabilité qu'il y ait **au moins deux** personnes infectées dans l'échantillon ?
   (On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.)
   (e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0{,}9$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

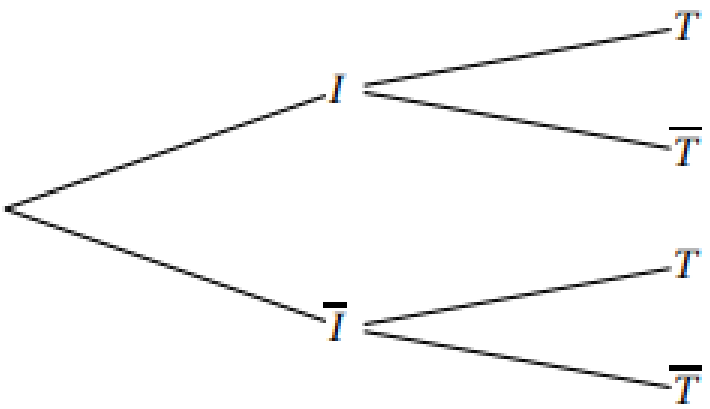
Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection) si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID-19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID-19.

Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa **sensibilité** et sa **spécificité**.
La sensibilité d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie (il s'agit donc d'un vrai positif).
La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie (il s'agit donc d'un vrai négatif).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :
- sa sensibilité est de 0,8 ;
- sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'évènement : « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $p(T) = 0{,}05503$.
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ? (On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.)